Е. М. Вечтомов, И. В. Абрамова, З. В. Шилова

Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза

Актуальность представленного исследования обусловлена требованием к фундаментализации подготовки выпускников, что обуславливает необходимость выделения таких структурных единиц научного знания современной математики, как математические структуры (алгебраические, порядковые, топологические). Порядковая структура справедливо считается фундаментальной математической структурой, которая позволяет формировать математическую компетентность студентов вуза. Математическая структура является неотъемлемой частью дискретной математики, входит в математические основы компьютерных наук. При этом проблема обучения порядковой структуре студентов вуза и развития у них математической компетентности разработана недостаточно.

Цель исследования – разработать дидактические принципы, содержание, методы и методические рекомендации обучения порядковой структуре и порядковому подходу студентов через учебные дисциплины и научно-исследовательской работе.

При исследовании данной проблемы на первом этапе использованы методы: подбор и анализ научной и учебно-методической литературы по изучению порядковой структуры, анализ и обобщение опыта членов алгебраической научной школы по использованию порядковой структуры и порядковых методов в исследованиях и преподавательской деятельности. На втором этапе применялись методы: структурирование, подбор модельных примеров, выработка дидактических принципов обучения порядковой структуре, разработка занятия с применением модельных примеров с целью демонстрации порядкового подхода, разработка методических рекомендаций. На завершающем этапе исследования использовались эмпирические методы: педагогическое наблюдение, количественная и качественная оценка результатов обучения студентов математическим структурам.

В результате описана методика, включающая в себя дидактические принципы, содержание, методы и методические рекомендации обучения студентов порядковой структуре. Составлена программа учебной дисциплины для магистров, представлено одно из разработанных занятий (всего отведено 30 ч. лекционных и 32 ч. практических занятий), в которых с помощью модельных примеров продемонстрировано применение порядкового подхода в обучении математике. Показаны ресурсные возможности порядковой структуры в научно-исследовательской работе.

Изучение порядковой структуры имеет большое научное, методологическое, методическое и развивающее значение для развития математической компетентности, формирования фундаментальных знаний и компетенций студентов вуза, работа которых в будущем будет связана с математикой и информатикой. Разработанная методика направлена на обучение студентов порядковой структуре, которая в математике соответствует дискретной линии и является научным стержнем в областях, связанных с информационными технологиями, защитой информации, другими компьютерными науками, активно развивающимися в настоящее время.

Ключевые слова: порядковая структура, математическая компетентность, отношение порядка, упорядоченное множество, обучение математике в вузе, научно-исследовательская работа

Ссылка для цитирования:

Вечтомов Е. М., Абрамова И. В., Шилова З. В. Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза // Перспективы науки и образования. 2019. № 5 (41). С. 170-188. doi: 10.32744/pse.2019.5.13

E. M. VECHTOMOV, I. V. ABRAMOVA, Z. V. SHILOVA

Ordinal structures as a means of developing University students' mathematical competence

The topicality of the present study is caused by the demand for the fundamentalization of University graduates training, which dictates highlighting of such structural units of modern mathematical scientific knowledge as mathematical structures (algebraic, ordinal, topological). The ordinal structure is deservedly considered to be a fundamental mathematical structure that allows you to form the University students' mathematical competence. The mathematical structure – an integral part of discrete mathematics – is included in the mathematical foundations of computer science. At the same time, the problem of teaching the ordinal structure to University students and developing their mathematical competence is not developed enough.

The article is devoted to solving the methodological problem: what is the method of teaching mathematical structures to students. The purpose of the research is the following – basing on the analysis and generalization of methodological and scientific research, experimental evaluation of teaching mathematical structures in higher education, to develop didactic principles, content, methods and guidelines for teaching the ordinal structure and ordinal approach of students through academic disciplines and research work.

At the first stage of this problem study, the following methods are used: selection and analysis of scientific and educational literature on the study of ordinal structure, analysis and generalization of the experience of the algebraic scientific school members on the use of ordinal structure and ordinal methods in research and teaching. At the second stage, the following methods are used: structuring, selection of model examples, development of didactic principles of teaching the ordinal structure, elaboration of classes using model examples to demonstrate the ordinal approach, elaboration of guidelines. At the final stage of the research, empirical methods for pedagogical monitoring the quality of teaching mathematical structures to students are used.

The article describes a technique that includes didactic principles, content, methods and guidelines for teaching the ordinal structure to students. The program of the discipline for future masters is made, one of the elaborated classes (in general, there are 30 hours of lectures and 32 hours of classes) is presented, in which with the help of model examples the application of the ordinal approach in teaching mathematics is demonstrated. The resource possibilities of the ordinal structure in the research work are shown, the topics for students' final qualifying works and master's theses are indicated.

The study of the ordinal structure is of great scientific, methodological, methodical and developmental importance for the development of mathematical competence, the formation of fundamental knowledge and competencies of University students, whose future work is to be associated with mathematics and computer science. The developed method is aimed at teaching students the order structure, which corresponds to a discrete line in mathematics and is the scientific core in the fields related to information technology, information security and other computer sciences developing actively at the present time.

Key words: ordinal structure, mathematical competence, order relation, ordered set, teaching mathematics at University, research work

For Reference:

Vechtomov, E. M., Abramova, I. V., & Shilova, Z. V. (2019). Ordinal structures as a means of developing University students' mathematical competence. *Perspektivy nauki i obrazovaniya – Perspectives of Science and Education*, 41 (5), 170-188. doi: 10.32744/pse.2019.5.12

Введение

Современная математика изучает математические структуры и взаимосвязи между ними. Порядковая структура справедливо считается наиважнейшей математической структурой. Она пронизывает все разделы математики: составляет неотъемлемую часть дискретной математики, входит в математические основы компьютерных наук. Порядковый подход позволяет решать исследовательские задачи абстрактной алгебры и общей топологии.

При этом проблема обучения порядковой структуре студентов высшей школы и использования ее в научно-исследовательской работе разработана недостаточно. Можно констатировать, что порядковой структуре практически не уделяется внимания ни в школе, ни в вузе. Обучение часто сводится к записи основных определений и разбору нескольких простейших примеров.

Актуальность и новизна проблемы объясняется также тем, что высшее образование России переживает период становления. Двухуровневая система требует новых подходов к организации учебной и научно-исследовательской работы (НИР) студентов. Федеральные образовательные стандарты предоставляют вузам право самим составлять образовательные программы и определять содержание образования, поэтому возникает проблема выбора учебных дисциплин, составления их программ. Особенно остро эта проблема стоит для магистратуры. Поэтому актуальной является проблема разработки методики обучения студентов порядковой структуре и порядковому подходу. В качестве примера применения данной методики в статье рассматривается методика преподавания программы учебной дисциплины «Упорядоченные множества и решетки» для математических направлений подготовки уровня магистратуры.

Предложенная в статье методика обучения студентов порядковой структуре через учебную дисциплину и НИР была разработана и успешно использована в Вятском государственном университете.

Цели и задачи исследования

Целью данной исследования является разработка методики, включающую в себя дидактические принципы, содержание, методы и методические рекомендации обучения порядковой структуре и порядковому подходу студентов через учебные дисциплины и НИР.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи.

1. Сформулировать дидактические принципы, используемые при обучении порядковой структуре, и обосновать ресурсные возможности порядковой структуры в следующих направлениях:

- 1) учебная работа студентов-математиков,
- 2) НИР студентов,
- 3) проведение научных исследований.

2. Осуществить отбор и структурирование содержания и методов обучения порядковой структуре студентов через учебные дисциплины и НИР.

3. Разработать методические рекомендации по преподаванию порядковой структуры, опирающиеся на имеющийся опыт в Вятском государственном университете.

Состояние разработанности проблемы

- Изучению математических структур в целом и порядковой структуры в частно-

сти посвящены многие монографии и научные труды российских и зарубежных авторов разных лет. Эти издания в большинстве своем носят научный, но не учебно-методический характер и могут быть использованы в преподавательской деятельности только после серьезной переработки.

- Несмотря на первостепенную важность, порядковая структура по сравнению с алгебраическим и топологическим типами структур практически не изучается ни на одной ступени математического образования. Учебники математики для студентов и школьников содержат лишь первоначальные сведения и простейшие примеры порядка.
- В литературе по теории и методике обучения математике в высшей школе мало исследованы вопросы разработки для магистерских направлений программ учебных дисциплин и научно-исследовательской работы.

Теоретический и практический вклад авторов материалов статьи

- Теоретически обоснованы дидактические принципы, на которые опирается обучение порядковой структуре.
- Составлена программа учебной дисциплины для магистратуры «Упорядоченные множества и решетки».
- Разработан проект одного из занятий спецкурса для магистрантов «Упорядоченные множества и решетки».
- На модельных примерах описана методика реализации порядкового подхода в обучении математике.
- Раскрыты ресурсные возможности порядковой структуры в НИР. Составлен список тем, связанных с понятием порядка, для выпускных квалификационных работ.
- Разработаны методические рекомендации для преподавателей по обучению студентов порядковой структуре.

Исследование проводилось в три этапа:

Аналитический – результаты представлены в разделе «Теоретический анализ источников».

Экспериментальный – раздел «Материалы и методы исследования».

Эмпирический – раздел «Результаты исследования».

Теоретический анализ источников

Анализ российской научно-педагогической литературы

В своей знаменитой концептуальной статье «Архитектура математики» [37] группа французских математиков, объединенных псевдонимом Бурбаки, определила математику как дедуктивную науку, изучающую математические структуры, то есть множества с заданными на них операциями и отношениями.

Е.М. Вечтомов в своих учебных пособиях [14; 15] предлагает на изучение все основные математические структуры: алгебраическая, порядковая, топологическая, структура с мерой и структура инцидентности, исследуются их естественные взаимосвязи, рассматриваются начала современной теоретико-множественной математики, неотделимой от понятия математической структуры, в пособиях предлагаются более 350 упражнений разной степени трудности. Книги предназначены студентам-математикам, бакалаврам и магистрантам, всем тем, кто искренне интересуется математикой.

На языке математических структур выражаются разнообразные проявления философских категорий количества, формы и меры. Подчеркнем, что математические структуры определяются и изучаются на языке теории множеств – фундаменте классической математики. Многие конкретные математические объекты относятся к одному из этих перечисленных моноструктур или являются их естественным переплетением.

Психолог Ж. Пиаже правомерно считает, что основные типы математических структур соответствуют подобным им психологическим структурам и интеллектуальным способностям человека [33]. Это вполне согласуется с метафизическим принципом единства мира, гармоничным сосуществованием его материальной, идеальной и психической граней. Поэтому актуальной задачей математического образования является формирование и развитие абстрактного структурного мышления путем изучения важнейших математических структур, в том числе и порядковой.

Зачатки порядковой структуры начали формироваться еще на заре становления человеческого разума, когда появилось осознание отличия предметов или их количества по величине. С появлением понятия числа появился способ фиксировать эти отличия [3].

Сравнение материальных и идеальных элементов по величине – фундаментальный способ освоения действительности и научного исследования. Еще в V в до н. э. Пифагор говорил, что все упорядочивается согласно числам. Действительно, реальные объекты часто сравниваются по той или иной числовой величине: материки – по площади и количеству расположенных на них стран, страны – по плотности и численности населения, качество жизни населения – по уровню доходов и продолжительности жизни людей, и т. п.

Такой подход осуществляется и в науке: «К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно не существенно, будут ли это числа, фигуры, звёзды, звуки или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера...» (Рене Декарт). Простейшие известные примеры сравнения математических объектов, сложившиеся исторически: действительные числа по величине, линии – по длине, плоские фигуры – по площади, тела – по объему. В теории множеств множества сравниваются и по мощности, и с помощью отношения включения.

Все рассмотренные выше примеры объединены общей формальной структурой, которую принято называть порядковой структурой. Исходным порядковым понятием служит отношение порядка, то есть бинарное отношение на множестве, удовлетворяющее свойствам рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. А базовым порядковым объектом является упорядоченное множество как множество с определенным на нем отношением порядка.

Исторически сначала на интуитивном уровне понятие порядка зародилось одновременно с понятием множества, поэтому оно является совершенно естественным в наивной теории множеств. Учебное пособие профессора А. В. Архангельского [2] написано на основе лекций, прочитанных им на механико-математическом факультете МГУ. В данном пособии достаточно полно и доступно для начинающих изложена канторовская теория множеств. Изложение сопровождается большим количеством задач. Цель книги — научить практической работе с множествами. Приведены основные факты, относящиеся к понятию порядка: рассмотрена арифметика кардинальных чисел, приведены важнейшие теоремы о вполне упорядоченных множествах и ординалах, дано введение в комбинаторную теорию множеств, имеющую глубокие применения. Такие же цели преследует и книга академика П. С. Александрова [1]. В ней

можно прочитать первоначальные сведения о связи между порядком и топологией. Эти издания предназначены для широкого круга читателей, интересующихся основами математики.

Учебно-методический характер носит издание [6], написанное по материалам лекций и семинаров, проводимых для студентов мехмата МГУ его авторами. Здесь содержится теоретический материал и 150 задач различной сложности, связанные с изучением порядковой структуры в «наивной теории множеств». Изложение рассчитано на учеников математических школ, студентов-математиков и всех, интересующихся основами теории множеств.

О равенстве, сходстве и порядке повествует [35]. Автор детально рассматривает общее понятие отношения и как частный случай отношение порядка, приводит примеры отношений из школьной математики, а также говорит о применении этих понятий в математической лингвистике.

В монографии профессора МГУ Л. А. Скорнякова [31], адресованной научным работникам, аспирантам и студентам вузов, сухим академическим языком изложены основы теории структур. Каждый параграф завершается серией упражнений. Обозначенная автором цель издания – выработать у читателей теоретико-структурное мышление.

Первая глава первого тома книги «Общая алгебра», вышедшего в серии «Справочная математическая библиотека» под общей редакцией Л. А. Скорнякова [23] посвящена отношениям, отображениям и частично упорядоченным множествам. В ней лаконично без доказательств изложены все основные идеи и направления, связанные с понятием порядка. Текст может быть использован в качестве справочного материала при изучении порядковой структуры.

Статьи двух авторов [7; 10] представляют собой краткий обзор исходных понятий и основных теоретических результатов для упорядоченных множеств с конечным условием минимальности и линейно упорядоченных множеств. Статьи носят научно-методический характер и могут быть использованы в научно-исследовательской работе студентов. Их цель – обратить внимание преподавателей и студентов на важный раздел математики, связанный с изучением порядковой структуры. Порядковая структура тесно связана с алгебраической и топологической структурами. Взаимосвязям математических структур посвящены статьи этих же авторов [8; 49].

С развитием компьютерных технологий активно стали развиваться теоретическая информатика и дискретная математика, где понятие порядка является одним из фундаментальных. Разработкой алгоритмов эффективных вычислений для перечисления конечных частичных порядков занимается В. И. Родионов, статья [26] продолжает его исследования. В ней получены соотношения рекуррентного характера, относящиеся к решению этой задачи.

Отношение порядка «меньше или равно» на множестве действительных чисел лежит в основе раздела математики, изучающего числовые и функциональные неравенства [22]. Порядок естественным образом связан с графами [24].

Порядковая структура пронизывает все разделы и области математики. Теоретико-решеточный подход позволяет более полно охватить изучаемые математические объекты, выявить их новые свойства и связи, поэтому широко применяется при решении многих исследовательских задач современной абстрактной алгебры и общей топологии.

Основным результатом работы [30] является доказательство определяемости любого полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций на произвольном тополо-

гическом пространстве X как решеткой $A(U(X))$ подалгебр полуполя $U(X)$ так и ее под-
решеткой $A_1(U(X))$ подалгебр с единицей.

В работе [12] доказана определяемость любого компакта X решеткой идеалов, а также решеткой конгруэнций идемпотентного полукольца всех непрерывных функций на X со значениями в числовом единичном отрезке с обычным умножением и сложением $\max$.

Установлено [20], что любое хьюиттовское пространство X определяется решеткой $A(U^v(X))$ подалгебр полуполя $U^v(X)$ всех непрерывных положительных функций на топологическом пространстве X . Топологическое пространство называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени числовой прямой R .

Статья [13] посвящена изучению решётки $L(M)$ всех подмногообразий многообразия M мультипликативно идемпотентных полуколец. Получены некоторые соотношения в $L(M)$. Доказано, что $L(M)$ является решёткой с псевдодополнениями. Описаны псевдодополнения в решётке $L(M)$; показано, что относительно включения они образуют 64-элементную булеву решётку. Показано, что решётка $L(M)$ бесконечна и не модулярна.

Основным объектом изучения в статье [34] является решеточно упорядоченное полукольцо, называемое *drl*-полукольцом. Основные источники возникновения *drl*-полугрупп – это полугруппы, решетки и полурешетки с делением. Появление таких алгебр тесно связано с двумя проблемами. Во-первых, с 115-й проблемой Г. Биркгофа [5]: построить общую абстрактную конструкцию, которая как частные случаи включала бы в себя булевы алгебры (кольца) и решеточно упорядоченные группы. Во-вторых, с 37-й проблемой Л. Фукса [42] описания решеточно упорядоченных полуколец. Их частичными решениями можно считать построение теорий *drl*-полугрупп и *drl*-полуколец.

Анализ зарубежных исследований

Как на русском языке, так и на английском, количество учебной литературы по изучению порядковой структуры весьма ограничено. Одной из таких немногих является книга [44] по упорядоченным множествам. Здесь для изучения порядковой структуры используется теоретико-множественный подход, излагаются разные способы упорядочивания множества, подробно рассматриваются лексикографические произведения. Далее подробно исследуется понятие мощности множества. В числе прочих рассмотренных вопросов - теория размерности упорядоченных множеств, квазиупорядоченные множества, комбинаторная теория множеств для упорядоченных множеств и др. Эта книга предназначена для студентов математики и для математиков, интересующихся теорией множеств. Чтение предполагает наличие некоторых знаний по наивной теории множеств. Поскольку все доказательства даются очень подробно, книга может быть использована как учебник по изучению упорядоченных множеств.

Книга по теории множеств группы французских математиков, известной под псевдонимом Никола Бурбаки [38], была впервые издана в Париже в 1970 г. В ней системно и последовательно в стиле, присущем всем книгам многотомной коллекции изданий Бурбаки, изложены вопросы, связанные с понятием порядка, упорядоченного множества, порядкового числа и другие, относящиеся к порядковой структуре.

Другая книга по теории множеств [40] дает ответы на вопросы, позволяющие понять, что такое число, бесконечность, непрерывность, порядок. Этот учебник представляет собой изложение классической теории множеств и состоит из четырех относительно независимых частей. Понятия порядка и ординала представлены во второй

части. Издание содержит богатый материал, которого вполне достаточно для чтения спецкурсов для магистрантов и аспирантов. Это полезный ресурс для экспертов, работающих в соответствующей или смежной области математики, и начинающих исследователей, желающих самостоятельно и основательно изучить теорию множеств.

Работа [48] представляет собой введение в теорию упорядоченных множеств. Первые три главы дают читателю первоначальные сведения о порядке и порядковой структуре. Далее автор представляет открытые или недавно решенные проблемы, чтобы мотивировать конструирование новых примеров и исследование новых классов упорядоченных множеств. К числу основных тем относятся: цепи и антицепи, наименьшие верхние и наибольшие нижние грани, ретракции, решетки, размерность упорядоченных множеств, интервальные порядки, лексикографические суммы и произведения, алгоритмические подходы и роль алгебраической топологии. Изложение сопровождается упражнениями, иллюстрациями и нерешенными вопросами. Это хороший ресурс для заинтересованного исследователя.

Вопросы, относящиеся к исследованию порядковой структуры, хорошо освещены в научной зарубежной литературе. Некоторые книги зарубежных авторов о порядковой структуре были переведены на русский язык и хорошо известны в России.

Ставшие классическими монографии [5; 21] отражают основные направления теории решеток и ее приложения. В них приведены с доказательствами основные теоремы, в каждой из книг указаны упражнения, открытые вопросы по теории решеток. Некоторые проблемы Биркгофа [4; 5] до сих пор вызывают интерес и остаются нерешенными.

Монография [46] также предназначена для глубокого и основательного изучения теории упорядоченных множеств и решеток. Предварительная информация в книге сведена к минимуму, поэтому для понимания материала необходима подготовка в области абстрактной алгебры. Издание может быть рекомендовано исследователям, аспирантам и магистрантам. В книге есть более 240 тщательно подобранных упражнений. Круг вопросов включает в себя: модулярные, полумодулярную и дистрибутивную решетки, булевы алгебры, представление распределительных решеток, алгебраические решетки, конгруэнции на решетках, свободные решетки, теоремы о неподвижной точке, теорию двойственности и многое другое.

Упорядоченным множествам и решеткам также посвящено научное издание [41]. Оно адресовано подготовленным специалистам, знакомым с абстрактной алгеброй и теорией множеств, в первую очередь аспирантам и исследователям, интересующимся порядковой структурой.

Порядковая структура составной частью вплетена во многие разделы математики, поэтому интерес к ней проявляют многие исследователи. В издании [45] представлены материалы научной конференции Positivity VII, проходившие с 22 по 26 июля 2013 года в Лейдене, Нидерланды. Доклады на конференции охватывали широкий спектр тем, связанных с порядковыми структурами и их приложениями в самом широком смысле слова. Издание посвящено представлению последних результатов в этой живой и растущей области.

Решение исследовательских задач в области современной алгебры с применением порядкового и решеточного методов представлено в зарубежных научных статьях. G. Czédli занимался исследованием полных решеток конгруэнтности двух связанных модулярных решеток [39]. S. Sadiq Basha решал задачи дискретной оптимизации в частично-упорядоченных множествах [43]. B. Schröder изучал упорядоченные множе-

ства в комбинаторики и топологии [47]. F. Wehrung рассматривал решения задач решётки конгруэнтности Дилворта [50]. В отечественных исследованиях следует назвать работы В. И. Варанкиной, Е. М. Вечтомова и др., которые изучали полукольца непрерывных неотрицательных функций [9], определимость компактов решётками идеалов и конгруэнций полуколец [11], аннигилятор характеристики булевых колец и булевых решеток [17], решетку подалгебр колец непрерывных функций и пространств Хьюитта [18]. В.В. Сидоров решал задачи на исследование изоморфизмов решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с Мах-дополнением [29].

Материалы и методы исследования

Методы исследования

В исследованиях, направленных на достижение заявленной цели, применялись следующие методы: На первом этапе исследования: подбор и анализ научной и учебно-методической литературы по изучению порядковой структуры, анализ и обобщение опыта членов алгебраической научной школы по использованию порядковой структуры и порядковых методов в исследованиях и преподавательской деятельности. На втором этапе применялись методы исследования – разработка методологии (или методики), включающую в себя дидактические принципы, содержание, методы и методические рекомендации обучения порядковой структуре и порядковому подходу студентов через учебные дисциплины и НИР. На заключительном этапе исследования применялись эмпирические методы для изучения, анализа, обобщения результатов разработанных материалов.

Методика обучения студентов порядковой структуре

Дидактические принципы обучения порядковой структуре

Сформулируем и обоснуем ведущие дидактические принципы, на которые опирается обучение студентов порядковой структуре.

I. Принцип объективности, научности. Отношение порядка – фундаментальное математическое понятие. Применение этого принципа означает научность излагаемого знания, то есть четкость определений и формулировок, строгость доказательств, указание границ данной математической теории, ее связей с другими научными областями и приложений. Математика – единая наука, разные разделы которой связаны содержательно и структурно. Переплетение основных математических структур, к которым относится порядковая структура, порождает тесную взаимосвязь разных областей математики. Демонстрация таких связей подтверждает идею единства математики и объективности математического знания. Порядковая структура, являясь одной из самых фундаментальных дискретных структур математики, входит в состав математических основ компьютерных наук. Компьютерная алгебра и компьютерная графика объективно подтверждают и усиливают возможности применения аппарата теории упорядоченных множеств в самых разных областях науки и практики.

II. Принцип наглядности. Иллюстрация порядковых понятий и различные их интерпретации способствует усвоению абстрактного материала. Ключевым методом в изучении порядковой структуры является использование модельных примеров. Важную роль для наглядного восприятия порядковых понятий играет изображение конечных упорядоченных множеств диаграммами Хассе. Кроме того, внутри математические связи тоже хорошо прослеживаются на конечных объектах.

III. Принцип доступности при необходимой степени трудности при обучении сложному материалу о порядковой структуре означает необходимость пропедевтики. Поскольку понятие упорядоченного множества является весьма абстрактной структурой, обобщающей целый ряд конкретных математических объектов, для усвоения этого понятия важна подготовительная работа – повторение соответствующего изученного материала и его систематизация, подробный разбор примеров на отношение порядка.

IV. Принцип последовательности, систематичности обеспечивается структурой и логикой организации учебной и научно-исследовательской работы студентов. Отметим необходимость тренинга. Изучение порядковой структуры должно сопровождаться систематическим и самостоятельным решением студентами разнообразных упражнений: проверочных тестов, заданий учебного характера, учебно-исследовательских и научно-исследовательских задач. Порядковая структура пронизывает все разделы элементарной и высшей математики, поэтому последовательное ее изучение обеспечивает преемственность всех уровней математического образования.

V. Принцип прочности усвоения знаний, умений и навыков в сочетании с опытом творческой деятельности обеспечивается работой преподавателя по подготовке упражнений и задач о порядковой структуре самого широкого спектра: от простых до сложных, от практических до теоретических, от учебных до научно-исследовательских, от узкоспециальных до учитывающих связи с другими областями. Порядковая структура располагает такими возможностями.

Содержание обучения студентов порядковой структуре

Для обучения студентов порядковой структуре можно использовать учебные дисциплины разного содержания, например: «Линейно упорядоченные пространства», «Дистрибутивные решетки».

Данная статья описывает процесс внедрения в учебный процесс дисциплину «Упорядоченные множества и решетки». В настоящее время она включена в учебные планы для магистратур направлений «Математика и компьютерные науки» и «Педагогическое образование» с профилем «Математика» в ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет». Главной целью дисциплины является – ознакомление студентов с порядковой структурой в чистом виде (аксиоматика, в контексте конечной математики) и с элементами алгебраической теории решеток. Другая цель – показать тесные связи упорядоченных множеств с алгебраической и топологической структурами, наличие которых свидетельствует о единстве математики (см. табл. 1).

Таблица 1

Программа дисциплины «Упорядоченные множества и решетки»

№	Название темы
1	История развития понятия «порядка»
2	Упорядоченные множества: 1. Основные понятия. 2. Конечные упорядоченные множества. 3. Упорядоченные множества с условием минимальности. 4. Линейно и вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора и равносильные предложения.

3	Решетки: 1. Решетки как упорядоченные множества. 2. Решетки как алгебры. Эквивалентность двух определений. 3. Алгебраические конструкции: подрешетка, идеал, конгруэнция, факторрешетка, гомоморфизм, прямое произведение. 4. Полные решетки. Теорема о неподвижной точке.
4	Дистрибутивные решетки: 1. Свойства и характеристики. 2. Простые идеалы. Теорема о существовании простых идеалов. 3. Функциональное представление. 4. Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решетках.
5	Булевы решетки: 1. Булевы решетки и их свойства. 2. Теоремы Стоуна о строении булевых решеток. 3. Булевы кольца и обобщенно булевы решетки.

По каждой из предложенных тем в традиционной форме проводятся лекции и практические занятия. Очертим круг вопросов, которые рассматриваются на практических занятиях по разделам.

1. Повторение теоретико-множественных понятий. Модельные примеры упорядоченных множеств. Определение исходных порядковых понятий. Конечные упорядоченные множества и их диаграммы Хассе. Отработка порядковых понятий на модельных примерах, их иллюстрация таблицами и графами, на диаграммах Эйлера-Венна и Хассе. Доказательство простейших свойств упорядоченных множеств. Принцип двойственности. Построение новых примеров и контрпримеров.

2. Понятие решетки. Эквивалентность порядкового и алгебраического определений. Начала теории решеток. Понятия подрешетки, идеала, конгруэнции, гомоморфизма, фактор-решетки, прямого произведения решеток.

3. Дистрибутивные решетки. Их свойства и представления. Построение решеток.

4. Булевы решетки. Основные примеры. Булевы алгебры и булевы кольца. Исследовательские задачи об упорядоченных множествах и решетках.

Методические рекомендации обучения студентов порядковой структуре

Во-первых, преподаватель должен знать *исходные порядковые понятия*, включая точные грани, виды упорядоченных множеств, в частности упорядоченные множества с условием минимальности (они служат носителем индуктивных рассуждений, допускают нетерову индукцию), решетки, булевы алгебры, упорядоченные группы, кольца и поля.

Во-вторых, нужно в своей работе опираться на *модельные примеры* [16]. Познавание и изучение абстрактного и общего через конкретное и частное – естественный и плодотворный подход в науке и обучении. При этом понятия высокого уровня абстрактности сводятся к более конкретным и наглядным объектам. Указанный подход широко распространен в современной математике (особенно в абстрактной алгебре, алгебраической геометрии, топологии, функциональном анализе), самой абстрактной и формализованной из наук. Основные примеры упорядоченных множеств: цепь действительных чисел с обычным порядком, булеаны, решетка натуральных чисел с отношением делимости. Эти примеры хорошо иллюстрируют обобщающий характер порядкового подхода. Полезно научиться изображать конечные упорядо-

ченные множества диаграммами Хассе, что особенно важно в дискретной математике. Диаграммы Хассе, представляющие собой стандартные графы упорядоченных множеств, служат источником самых разнообразных примеров и представляют собой общий прием исследования конечных упорядоченных множеств, в частности конечных решеток.

В-третьих, необходимо обратить внимание на общеалгебраические конструкции: подрешетки, идеалы, гомоморфизмы, конгруэнции, фактор-решетки, прямые произведения решеток. Теория решеток, используя порядковый язык, является частью современной алгебры. Надо понимать, что алгебры высказываний, множеств и событий являются булевыми алгебрами, а множество всех действительных функций на произвольном множестве образует дистрибутивную решетку с поточечно определенным отношением порядка.

В-четвертых, необходим определенный *минимум фактов*: простейшие свойства упорядоченных множеств, принцип двойственности, эквивалентность порядкового и алгебраического понятий решетки, теорема Стоуна о строении конечных булевых алгебр, теорема Тарского о неподвижной точке, лемма Кенига, формулировки леммы Цорна и теорем Цермело и Гельдера, порядковые свойства основных числовых систем. Одним важным методом теории являются различные представления упорядоченных множеств и дистрибутивных решеток как систем множеств и функций. Методу представлений также следует уделить должное внимание.

Реализация порядкового подхода

Реализация порядкового подхода продемонстрирована на модельных примерах отношения порядка. Именно модельные примеры позволяют увидеть универсальность порядкового подхода и выработать у студентов порядковое мышление. В предложенной форме можно организовать одно из первых практических занятий по учебной дисциплине «Упорядоченные множества и решетки».

Цель занятия: определение и иллюстрация основных порядковых понятий.

Для достижения цели были разобраны важнейшие модельные примеры упорядоченных множеств и выделим то общее, чем все они обладают. В результате проиллюстрировано и отработано само понятие отношения порядка.

Первоначальные понятия теории упорядоченных множеств.

Определение 1. Упорядоченным множеством называется непустое множество X вместе с заданным на нем бинарным *отношением порядка* $\leq$, которое по определению (для любых $a, b, c \in X$):

- 1) рефлексивно: $a \leq a$;
- 2) транзитивно: $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
- 3) антисимметрично: $a \leq b \leq a \Rightarrow a=b$.

Более общим понятием служит *отношение квазипорядка*, определяемое как рефлексивное транзитивное бинарное отношение на множестве.

Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – произвольное упорядоченное множество. Элементы a и b упорядоченного множества X называются *сравнимыми*, если $a < b$, $a=b$ или $b < a$, и *несравнимыми* в противном случае. Знаки $<$, $\geq$ и $>$ имеют обычный смысл. Упорядоченное множество $\langle X, \geq \rangle$ *двойственно* к упорядоченному множеству $\langle X, \leq \rangle$, которое в свою очередь двойственно к $\langle X, \geq \rangle$.

Определение 2. Упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, или *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Если любые два элемента упорядоченного множества несравнимы, то оно называется *антицепью*.

Элемент $a \in X$ называется *наибольшим (наименьшим)*, если $x \leq a$ ($a \leq x$) для всех элементов $x \in X$. Элемент $a \in X$ называется *максимальным (минимальным)*, когда в X нет элементов $x > a$ ($x < a$).

Возьмем непустое подмножество Y в X . Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью (нижней гранью)* множества Y , если $y \leq x$ ($x \leq y$) для любого $y \in Y$. Если множество всех верхних граней множества Y непусто и имеет наименьший элемент, то этот элемент называется *точной верхней гранью* множества Y и обозначается $\sup Y$. Двойственным образом определяется понятие *точной нижней грани* $\inf Y$.

Рассмотрим важнейшие модельные примеры упорядоченных множеств.

Пример 1. Цепь $\langle \mathbf{R}, \leq \rangle$.

Это множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$ с естественным отношением порядка $\leq$. Очевидно, в $\mathbf{R}$ нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$, $\inf\{a, b\} = \min\{a, b\}$ для любых чисел a, b .

Пример 2. Булеан $\langle \mathbf{B}(M), \subseteq \rangle$.

Пусть M – произвольное непустое множество. Тогда множество его всех подмножеств $\mathbf{B}(M)$ с операциями $\cap$ и $\cup$ и порядком $\subseteq$ имеет наименьший элемент $\emptyset$ и наибольший элемент M . Точные грани для произвольных $A, B \in \mathbf{B}(M)$ определяются операциями объединения и пересечения: $\sup\{A, B\} = A \cup B$, $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Пример 3. Решетка натуральных чисел $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ с отношением делит $|$.

Это упорядоченное множество имеет наименьший элемент 1, и в нем нет наибольшего элемента. Точные грани любого конечного множества натуральных чисел находятся как наименьшее общее кратное (НОК) и наибольший общий делитель (НОД) этих чисел: $\sup\{m, n\} = \text{НОК}(m, n)$, $\inf\{m, n\} = \text{НОД}(m, n)$ для любых $m, n \in \mathbf{N}$.

Пример 4. Решетка неотрицательных целых чисел $\langle \mathbf{N}_0, | \rangle$.

Единица 1 – наименьший элемент в $\mathbf{N}_0$, но в отличие от предыдущего примера это упорядоченное множество имеет и наибольший элемент – это число 0. По-прежнему, $\sup\{m, n\} = \text{НОК}(m, n)$, $\inf\{m, n\} = \text{НОД}(m, n)$ для любых $m, n \in \mathbf{N}_0$.

Пример 5. Решетка подпространств векторного пространства V с отношением порядка $\subseteq$.

Здесь наименьший элемент – нулевое векторное пространство $\{0\}$, наибольший – само пространство V . Для любого конечного семейства $\{V_i\}$ подпространств векторного пространства V имеем: $\sup\{V_i\} = \bigcup V_i$, $\inf\{V_i\} = \bigcap V_i$.

Пример 6. Решетка функций $[0, 1]^{[a, b]}$ с поточечным отношением порядка.

В упорядоченном множестве $[0, 1]$ -значных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, наименьший и наибольший элементы – это функции-константы 0 и 1 соответственно. Для любых двух функций f, g точные грани определяются поточечно: в каждой точке точная верхняя грань $\sup\{f, g\}$ находится как $\max\{f(x), g(x)\}$, а точная нижняя грань $\inf\{f, g\}$ как $\min\{f(x), g(x)\}$.

Пример 7. Решетка классов A равносильных высказываний с отношением порядка импликации $\Rightarrow$.

В этом упорядоченном множестве A есть наименьший и наибольший элементы – высказывания И (истина) и Л (ложь). Для любых двух высказываний A и B имеем: $\sup\{A, B\} = A \vee B$, $\inf\{A, B\} = A \wedge B$.

Таким образом, НОК (наименьшее общее кратное) и НОД (наибольший общий делитель) натуральных чисел, объединение и пересечение множеств, дизъюнкция и конъюнкция высказываний суть примеры общих порядковых операций $\sup$ (точная верхняя грань) и $\inf$ (точная нижняя грань), показывающие универсальность по-

рядкового языка, терминологии и обозначений, принятых в теории упорядоченных множеств.

Экспериментальная база исследования

Опытно-экспериментальной базой исследования являлся ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», магистранты первого курса МКм и ПОДм (направления подготовки «Математика и компьютерные науки» и «Педагогическое образование» соответственно).

Было выделено три уровня определения сформированности математической компетентности:

- на репродуктивном уровне обучающиеся слабо владеют системой математических, предметных знаний, необходимых для успешного решения математических проблем;
- на функциональном уровне обучающиеся владеют системой математических, предметных знаний, необходимых для успешного решения математических проблем;
- на третьем уровне (индивидуально-творческом) обучающиеся имеют математические, предметные знания, обладающие свойством мобильности и составляющие целостную систему.

Результаты исследования

Результаты педагогических измерений по выполнению диагностической работы на начало и конец эксперимента в соответствии с выделенными уровнями представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты выполнения диагностической работы на начало и конец эксперимента

Группы / Уровни	Контрольная группа*		Экспериментальная группа*	
	Начало обучения	Конец обучения	Начало обучения	Конец обучения
Репродуктивный	95	28	98	7
Функциональный	5	62	2	74
Системный	0	10	0	19

* % студентов, находящихся на соответствующем уровне сформированности математической компетентности

Данные таблицы наглядно изображены в виде гистограммы (см. рис. 1). На которой отражены уровни сформированности математической компетентности.

Анализ гистограммы показывает, что рост функционального и системного уровней сформированности математической компетенции произошёл и в контрольной, и в экспериментальной группах, это объясняется тем, что работа по формированию математической компетенции происходит на всём протяжении обучения в вузе. Но в экспериментальной группе наблюдается более весомый рост уровня математической компетенции за счёт специально организованной работы, то есть за тот же промежуток времени студенты получили более эффективное приращение в математической компетенции (на функциональном уровне на 12%, на системном уровне на 9%).

Рисунок 1 Уровни сформированности математической компетентности студентов

Сравнительный анализ данных на начало обучения в контрольной и экспериментальной группе по критерию χ^2 -Пирсона не выявил статистически достоверных различий ($\chi^2 = 1,33$; $p > 0,05$). Сравнительный анализ данных на конец обучения в контрольной и экспериментальной группе по критерию χ^2 -Пирсона выявил статистически достоверных различий ($\chi^2 = 16,45$; $p < 0,05$).

Таким образом, подтверждается эффективность применения порядковых структур как средства развития математической компетенции студентов вуза.

Для организации работы по обучению студентов порядковой структуре были обоснованы основные дидактические принципы, на которые оно опирается. С учетом разработанных теоретических положений получены следующие результаты:

1. Разработана программа учебной дисциплины «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков. Программа реализуется в Вятском государственном университете для магистрантов направлений «Математика и компьютерные науки» и «Педагогическое образование» с профилем Математика. Она составлена с учетом многолетнего опыта по организации учебной и научно-исследовательской работы студентов.

2. Применение принципа наглядности продемонстрировано на примере реализации порядкового подхода через модельные примеры. Составлена разработка одного из практических занятий курса «Упорядоченные множества и решетки».

3. Предложен список тем НИР студентов с использованием порядковой структуры, которые могут быть использованы при написании курсовых и выпускных квалификационных работ: 1) «Абстрактная характеристика решетки натуральных чисел с отношением делимости»; 2) «Архимедовы линейно упорядоченные поля»; 3) «Числовая прямая как линейно упорядоченное пространство»; 4) «Стоуновы решетки»; 5) Лексикографическое произведение линейно упорядоченных множеств»; 6) «Ядерные идеалы в ограниченных решетках»; 7) «Введение отношения порядка на системе Пеано» и другие. Исследования студентов могут стать основой НИР на этапе послевузовского образования.

Эффективность предложенного подхода подтверждается успехами выпускников ВятГУ в дальнейших научных исследованиях. Порядковая структура и порядковый подход отражены в кандидатских диссертациях: «Положительно упорядоченные полутела» [27], «Абелево регулярные положительные полукольца» [32], «Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций» [28], «Мультипликативно идемпотентные полукольца» [25].

Обсуждение результатов

Изучение литературы по теории упорядоченных множеств и порядковой структуры показало, что это направление актуально в современной математике. И в отечественной, и в зарубежной научной литературе имеется много монографий, статей, в которых излагаются результаты научных исследований по порядковой структуре, применяются порядковые методы.

Порядковой структуре, по результатам первого этапа исследования, уделяется недостаточное внимание в учебной литературе. Отношение порядка, порядковый подход мало изучается в школе, а также на всех ступенях высшего математического образования.

Вместе с тем, порядковая структура имеет мощный дидактический и научный потенциал, как для студентов математических направлений подготовки, так и для математиков-исследователей, вузовских преподавателей математики и школьных учителей. Желательно систематически использовать порядковый язык при обучении математике студентов и аспирантов, находить и применять информацию об упорядоченных структурах, использовать модельные примеры.

Предложенный подход к организации учебной и НИР по обучению студентов порядковой структуре предъявляет высокие требования к преподавателю вуза, на основании которых были сформулированы методические рекомендации обучения порядковой структуре и порядковому подходу.

Заключение

Порядковая структура пронизывает практически все разделы математики, тем самым демонстрирует идею единства мира. Кроме того, она обеспечивает преемственность школьного и всех ступеней высшего образования, дает возможность неограниченного интеллектуального роста.

В работе продемонстрированы ресурсные возможности порядковой структуры, как в учебной, так и в научно-исследовательской работе. Данная работа направлена на продвижение специального изучения порядковой структуры, которое может осуществляться как в школе, так и в вузе, обеспечивая непрерывность математического образования.

Материалы статьи могут быть полезны для исследователей в области математики, преподавателей математики вуза и школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. М.: МГУ, 1989. 112 с.
3. Беран Л. Упорядоченные множества. Популярные лекции по математике. 55. М.: Наука. 1981. 64 с.
4. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М.: Мир. 1976. 440 с.
5. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
6. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 1. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 2017. 112 с.
7. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М. Линейно упорядоченные множества // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. №4. С. 16–27.
8. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М. Условия делимости для колец непрерывных функций со значениями в нормированных кольцах // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2015. №19. С. 54–69.
9. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семёнова И.А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. №4:2. С. 493–510.
10. Вечтомов Е.М., Варанкина В.И. Упорядоченные множества с конечным условием минимальности // Вестник Вятского государственного педагогического университета. 2000. №3–4. С. 11–12.
11. Вечтомов Е.М. Упорядоченные множества с диаграммой Хассе // Вестник ВятГГУ. 2002. №6. С. 13–15.
12. Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н. Определяемость компактов решетками идеалов и конгруэнций полуколец непрерывных $[0,1]$ -значных функций на них // Известия вузов. Математика. 2012. №1. С. 87–91.
13. Вечтомов Е.М., Петров А.А. Псевдодополнения в решётке многообразий мультипликативно идемпотентных полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. №21(3). С. 107–120.
14. Вечтомов Е. М. Математика: основные математические структуры: учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2018. 296 с.
15. Вечтомов Е. М. Философия математики: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. М.: Юрайт, 2018. 317 с.
16. Вечтомов Е.М. Модельные примеры в обучении современной математике // Вестник Вятского государственного педагогического университета. 2001. №5. С. 79–82.
17. Вечтомов Е.М. Аннуляторные характеристики булевых колец и булевых решеток // Математические заметки. 1993. №53(2). С. 15–24.
18. Вечтомов Е.М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. №62(5). С. 687–693.
19. Вечтомов Е.М. Курс по выбору «Функциональная алгебра и полукольца» для аспирантов-математиков // Современные проблемы науки и образования. 2015. №2. URL: <http://www.science-education.ru/129-21879> (дата обращения: 12.08.2019).
20. Вечтомов Е.М., Сидоров В.В. Определяемость хьюиттовских пространств решетками подалгебр полуполей непрерывных положительных функций с тах-сложением. Труды Института математики и механики имени Н.Н. Красовского. 2015. №21(3). С. 78–88.
21. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
22. Калинин С.И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана. Киров: ВятГГУ, 2002. 363 с.
23. Общая алгебра / под общей редакцией Л.А. Скорнякова. М.: Т.1, 1990. 592 с.; Т.2, 1991. 480 с.
24. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
25. Петров А.А. Мультипликативно идемпотентные полукольца: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06. Екатеринбург, 2015. 18 с.
26. Родионов В.И. Об одном рекуррентном соотношении в задаче перечисления конечных частичных порядков // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. №14. С. 98–111.
27. Ряттель А.В. Положительно упорядоченные полутела: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06. М., 2003. 15 с.
28. Сидоров В.В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06. Казань, 2011. 15 с.
29. Сидоров В.В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с тах-сложением // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. №19(6). С. 153–189.
30. Сидоров В.В. Определяемость полуполей непрерывных положительных функций решетками их подалгебр // Математический сборник. 2016. №207(9). С. 91–110.
31. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1980. 160 с.
32. Старостина О.В. Абелево регулярные положительные полукольца: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06. Киров, 2007. 15 с.
33. Тестов В.А. Стратегия обучения математике. М.: Технологическая Школа Бизнеса. 1999. 303 с.
34. Чермных В.В., Чермных О.В. Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец // Сибирские электронные математические известия. 2017. №14. С. 946–971.
35. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М: Наука, 1971. 254 с.
36. Abian A. Boolean rings. Boston: Brandegee Press, 1976.
37. Bourbaki N. L'Architecture des mathématiques. Les grands courants de la pensée mathématique, 1948, pp. 35–47.
38. Bourbaki N. Theory of sets. Springer. Berlin. Heidelberg. New York, 2004, 414 p.
39. Czárdi G. Complete congruence lattices of two related modular lattices. Algebra Univers, 2017, no. 78(3), pp. 251–289.

40. Dasgupta A. Theory of sets. Springer. New York, 2004, 412 p.
41. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, 2002, 298 p.
42. Fuchs L. Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press. Oxford–London–New York– Paris, 1963.
43. Ganesamoorthy C., Karpagavalli S.G. A Congruence Relation in Partially Ordered Sets. Thai J. Math, 2015, no. 13, pp. 399-403.
44. Harzheim E. Ordered sets. Springer. New York, 2005.
45. Jeu M., Pagter B., Gaans O., Veraar M. Ordered Structures and Applications. Positivity VII (Zaenen Centennial Conference). Leiden, the Netherlands, 2016, 507 p.
46. Roman S. Lattices and Ordered Sets. Springer. New York, 2008, 267 p.
47. Sadiq Basha S Discrete optimization in partially ordered sets. Journal of Global Optimization, 2012, 54:3, pp. 511-517.
48. Schröder B. Ordered Sets. An Introduction with Connections from Combinatorics to Topology. Springer. New York, 2016, 356 p.
49. Varankina V.I., Vechtomov E.M. Bases mathematical structures and their interconnection. Vyatgu – 100 years: innovative scientific projects, 2015, pp. 76-85. (In Russian)
50. Wehrung F.A solution to Dilworth's congruence lattice problem. Advances in Mathematics, 2007, no. 216, pp. 610-625.

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S. Introduction to set theory and General topology. Moscow, Science Publ., 1977. 368 p. (In Russian)
2. Arkhangel'skii A.V. Katarovsky set theory. Moscow, MSU Publ., 1989. 112 p. (In Russian)
3. Beran L. Ordered sets. Popular lectures in mathematics. 55. Moscow, Science Publ., 1981. 64 p. (In Russian)
4. Birkhoff G., Barti T. Modern applied algebra. Moscow, Mir Publ., 1976. 440 p. (In Russian)
5. Birkhoff G. lattice Theory. Moscow, Science Publ., 1984. 568 p. (In Russian)
6. Vereshchagin N.K, Shen A. Lectures on mathematical logic and theory of algorithms. Part 1. Beginnings of set theory. Moscow, MTSNMP Publ., 2017. 112 p. (In Russian)
7. Varankina V.I., Vechtomov E.M. Linearly ordered sets. *Mathematical Bulletin of pedagogical universities of the Volga-Vyatka region*, 2002, no. 4, pp. 16-27. (In Russian)
8. Varankin V.I. Vechtomov E.M. The Conditions of divisibility in rings of continuous functions with values in normed rings. *Mathematical Bulletin of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region*, 2015, no. 19, pp. 54-69. (In Russian)
9. Varankina V.I., Vechtomov E.M., Semenova I.A. Semi-Rings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences. *Fundamental and applied mathematics*, 1998, no. 4(2), pp. 493-510. (In Russian)
10. Vechtomov E.M., Varankina V.I. Ordered sets with a finite minimality condition. *Bulletin of Vyatka state pedagogical university*, 2000, no3-4, pp. 11-12. (In Russian)
11. Vechtomov E.M. the poset with the Hasse diagram. *Bulletin of Watchu*, 2002, no. 6, pp. 13-15. (In Russian)
12. Vechtomov E.M., Lubyagina E.N. Definability of compacts by lattices of ideals and congruences of semirings of continuous $[0,1]$ -valued functions on them. *Izvestiya vuzov. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 87-91. (In Russian)
13. Vechtomov E.M., Petrov A.A. Pseudo-Additions in the lattice of multiplicative idempotent semirings varieties. *Fundamental and applied mathematics*, 2016, no. 21(3), pp. 107-120. (In Russian)
14. Vechtomov E. M. Mathematics: basic mathematical structures: textbook for academic undergraduate. Moscow, Yurayt Publ., 2018. 296 p. (In Russian)
15. Vechtomov E. M. Philosophy of mathematics: textbook for bachelor's and master's degrees. Moscow, Yurayt Publ., 2018. 317 p. (In Russian)
16. Vechtomov E.M. Model examples in teaching modern mathematics. *Bulletin of Vyatka state pedagogical University*, 2001, no. 5, pp. 79-82. (In Russian)
17. Vechtomov E.M. Annihilator characterizations of Boolean rings and Boolean lattices. *Mathematical notes*, 1993, no. 53(2), pp. 15-24. (In Russian)
18. Vechtomov E.M. Lattice of subalgebras of rings of continuous functions and Hewitt spaces. *Mathematical notes*, 1997, no. 62(5), pp. 687-693. (In Russian)
19. Vechtomov E.M. Elective Course "Functional algebra and semiring" for graduate mathematicians. *Modern problems of science and education*, 2015, no. 2. Availab at: <http://www.science-education.ru/129-21879>. (In Russian)
20. Vechtomov E.M., Sidorov V.V. Definability of Hewitt spaces by lattices of subalgebras of semi-fields of continuous positive functions with max-addition. *Proceedings of Institute of mathematics and mechanics named after N.N. Krasovskiy*. 2015. no. 21(3), pp. 78-88. (In Russian)
21. Gratzer G. the General theory of lattices. Moscow, World Publ., 1982, 456 p. (In Russian)
22. Kalinin S.I. Average values of power type. Cauchy and Ki-fan Inequalities. Kirov: Vyatgu, 2002. 363 p (In Russian)
23. Total algebra / under general supervision of L.A. Skornyakova. Moscow, Vol. 1, 1990. 592 p.; Vol. 2, 1991. 480 p. (In Russian)
24. Ore O. Graph theory. Moscow, Science Publ., 1980. 336 p. (In Russian)
25. Petrov, A.A. Multiplicative idempotent semiring: Abstract Diss. PhD Fiz.-Matem. Sci., 01.01.06. Yekaterinburg, 2015, 18 p. (In Russian)
26. Rodionov V.I. On one recurrent relation in the problem of enumeration of finite partial orders. Sib. electron. mod. WPI, 2017, no. 14, pp. 98-111. (In Russian)
27. Rachel A.V. Positively ordered was poludela: Abstract Diss. PhD Fiz.-Matem. Sci., 01.01.06. Moscow, 2003, 15 p. (In Russian)
28. Sidorov V.V. Isomorphisms of lattices subalgebras of semirings continuous nonnegative functions: Abstract Diss.

- PhD Fiz.-Matem. Sci., 01.01.06. Kazan, 2011, 15 p. (In Russian)
29. Sidorov V.V. Isomorphisms of lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions with max-addition. *Fundamental and applied mathematics*, 2014, no. 19(6), pp. 153-189. (In Russian)
 30. Sidorov V. V. Definability of semi-fields of continuous positive functions by lattices of their subalgebras. *Mathematical collection*, 2016, no. 207(9), pp. 91-110. (In Russian)
 31. Skorniyakov L.A. Elements of the theory of structures. Moscow, Science, 1980, 160 p. (In Russian)
 32. Starostina O.V. Abelian regular positive semiring: Abstract Diss. PhD Fiz.-Matem. Sci., 01.01.06. Kirov, 2007. 15 p. (In Russian)
 33. Testov V.A. Strategy of teaching mathematics. Moscow, Technology Business School, 1999. 303 p. (In Russian)
 34. Chermnykh V.V., Chermnykh O.V. Functional representations of lattice-ordered semirings. *Siberian electronic mathematical news*. 2017, no. 14, pp. 946-971. (In Russian)
 35. Schneider Y.A. Equality, similarity, order. Moscow, Science Publ., 1971, 254 p. (In Russian)
 36. Abian A. Boolean rings. Boston: Brandegee Press, 1976.
 37. Bourbaki N. L'Architecture des mathématiques. Les grands courants de la pensée mathématique, 1948, pp. 35-47.
 38. Bourbaki N. Theory of sets. Springer. Berlin. Heidelberg. New York, 2004, 414 p.
 39. Czedli G. Complete congruence lattices of two related modular lattices. *Algebra Univers*, 2017, no. 78(3), pp. 251-289.
 40. Dasgupta A. Theory of sets. Springer. New York, 2004, 412 p.
 41. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press. 2002, 298 p.
 42. Fuchs L. Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press. Oxford-London-New York-Paris, 1963.
 43. Ganesamoorthy C., Karpagavalli S.G. A Congruence Relation in Partially Ordered Sets. *Thai J. Math.* 2015, no. 13, pp. 399-403.
 44. Harzheim E. Ordered sets. Springer. New York, 2005.
 45. Jeu M., Pagter B., Gaans O., Veraar M. Ordered Structures and Applications. Positivity VII (Zaanen Centennial Conference). Leiden, the Netherlands, 2016, 507 p.
 46. Roman S. Lattices and Ordered Sets. Springer. New York, 2008, 267 p.
 47. Sadiq Basha S Discrete optimization in partially ordered sets. *Journal of Global Optimization*, 2012, no. 54 (3), pp. 511-517.
 48. Schröder B. Ordered Sets. An Introduction with Connections from Combinatorics to Topology. Springer. New York, 2016, 356 p.
 49. Varankina V. I., Vechtomov E. M. Bases mathematical structures and their interconnection. *Vyatggu – 100 years: innovative scientific projects*, 2015, pp. 76-85. (In Russian)
 50. Wehrung F. A solution to Dilworth's congruence lattice problem. *Advances in Mathematics*, 2007, no. 216, pp. 610-625.

Информация об авторах

Вечтомов Евгений Михайлович

(Россия, Киров)

Профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики

Вятский государственный университет

E-mail: vecht@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-3490-2956

Абрамова Ирина Владимировна

(Россия, Пермь)

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин,

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: irena-leontio@mail.ru

ORCID ID: 0000-0001-6570-4007

Шилова Зоя Вениаминовна

(Россия, Киров)

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики

Вятский государственный университет

E-mail: zoya@soi.su

ORCID ID: 0000-0003-1715-2513

Information about the authors

Evgeny M. Vechtomov

(Russia, Kirov)

Professor,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Fundamental Mathematics

Vyatka State University

E-mail: vecht@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-3490-2956

Irina V. Abramova

(Russia, Perm)

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical and Natural Science

Disciplines

Perm State University

E-mail: irena-leontio@mail.ru

ORCID ID: 0000-0001-6570-4007

Zoia V. Shilova

(Russia, Kirov)

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics

Vyatka State University

E-mail: zoya@soi.su

ORCID ID: 0000-0003-1715-2513