Выпуклые функции как метапредметная составляющая математической подготовки магистрантов педагогического образования

Внимание авторов статьи сосредоточено на содержательно-методических проблемах, сопровождающих освоение характеристики, свойств и применений выпуклых функций будущими учителями математики в рамках их магистерской подготовки. Новизна подхода заключается в представлении выпуклых функций в качестве фундаментального образовательного объекта, что позволяет рассматривать формируемые знания и умения обучающихся как метапредметные. В ходе исследования осуществлен анализ нормативной и программной документации, определяющей подготовку будущих учителей математики, изучены классические и современные работы по теории выпуклых функций, осмыслены разделы учебной и научно-методической литературы по данной тематике. Сконструирована модель изучения выпуклых функций, содержательная компонента которой составляет основу дисциплины «Неравенства и выпуклые функции» для магистрантов педагогического образования в Вятском государственном университете. Анализ опытного преподавания в условиях реализуемой модели показал общее повышение математической культуры обучающихся, свидетельствует о развитии их критического мышления и исследовательских умений. Соответствующие выводы подкреплены рядом студенческих научных работ, в том числе опубликованных в цитируемых изданиях. Затрагиваемая тематика демонстрирует тесную связь с классическими и современными разделами математики, обнаруживает актуальные приложения и обладает мощным образовательным потенциалом. Применение разработанной модели обучения для магистрантов педагогического образования может составить основу повышения научно-методической компетентности будущего учителя математики, что представляет практическую ценность исследования.

Ключевые слова: выпуклые функции; магистранты педагогического образования; метапредметная подготовка; фундаментальный образовательный объект; неравенства Эрмита–Адамара, Коши, Ки Фана, Гюйгенса

Perspectives of Science & Education. 2018. 5 (35)

International Scientific Electronic Journal
ISSN 2307-2334 (Online)

Available: psejournal.wordpress.com/archive18/18-05/
Accepted: 26 August 2018
Published: 1 November 2018
No. 5 (35). pp. 240-251.

S. I. KALININ, L. V. PANKRATOVA

Convex functions as a meta-subject component of mathematical preparation of masters of pedagogical education

The task of improving the quality of the training of mathematics teachers in the conditions of the introduction of a competence approach determines the relevance of the selection of fundamental educational objects that provide meta-subject results of students' education. One such object in the content of the mathematical preparation of masters of pedagogical education can be convex functions. The purpose of the article is to substantiate the need for in-depth study of convex functions and their applications in the professional and pedagogical preparation of a mathematics teacher and also to reveal their meta-subject characteristics. Analysis of domestic and foreign scientific and scientific-methodological literature on convex functions, normative documentation for the training of mathematics teachers, theoretical modeling of the process of studying convex functions, and its experimental verification at the Vyatka State University. Monitoring of the results of experienced teaching within the framework of the developed model has shown an increase in the mathematical culture of students, the development of their critical thinking and research skills. The openness of the model of studying convex functions made it possible to differentiate the educational interests of students and build individual trajectories of learning for them. The effectiveness of the applied methodology for the forming of meta-knowledge and meta-skills of students is confirmed by methods and the results of the questionnaire. An in-depth study of convex functions should become an important component of the professional training of a mathematics teacher for a modern school. This notion is closely related to the classical and modern sections of mathematics, it constantly detects new applications and has a powerful educational potential. Representation of convex functions as a fundamental educational object allows us to speak about the scientific novelty of the study. The application of the developed model can form the basis for increasing the scientific and methodological competence of the future teacher of mathematics, which indicates the practical value of the work performed.

Key words: convex functions, masters of pedagogical education, meta-subject preparation, fundamental educational object, inequalities of Hermite-Hadamard, Cauchy, Ky Fan, Huygens

Введение

Сегодня одной из серьезнейших проблем высшего образования является разрешение противоречия между ростом объема информации, значимой в профессиональной подготовке будущего специалиста, и невозможностью расширения вузовских учебных программ в силу регламентированных ФГОС ВО ограничений аудиторной нагрузки студентов. Вследствие этого повышение эффективности процесса обучения предполагает его интенсификацию, т. е. использование внутренних методико-педагогических резервов.

Математическая подготовка является важным компонентом для обучающихся многих направлений. Ей отводится главенствующая роль в организации процесса обучения всех студентов-математиков, в частности будущих учителей математики. Математические дисциплины и смежные с ними курсы широко представлены в структуре учебных планов бакалавриата и магистратуры для направлений подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профили Математика и информатика (уровень бакалавриата), 44.04.01 Педагогическое образование, профиль Математика (уровень магистратуры), формируя базис предметных знаний и умений будущих преподавателей математики. Естественно предположить, что на уровне магистратуры приобретение выпускниками профессиональных компетенций активизируется, так как помимо получения научных знаний и репродуктивной практики у студентов появляются обширные возможности приобретения опыта творческой, исследовательской деятельности и сопряженного с ней эмоционально-ценностного опыта.

Касаясь содержания математического образования студентов вузов, подчеркнем, что понятие выпуклой функции является одним из важнейших понятий не только математического анализа, но и математики в целом. Значение выпуклых функций в науке трудно переоценить: они широко применяются не только в фундаментальных математических разделах, но и в различных прикладных областях, в частности помогают решать задачи экономики, программирования, оптимального управления.

В контексте сказанного контрастным выглядит представление тематики выпуклых функций в содержании математической подготовки получающих высшее образование. Как правило, студенты бакалавриата, изучающие подробный курс математического анализа, с выпуклыми функциями знакомятся при освоении раздела «Дифференциальное исчисление вещественных функций одной вещественной переменной». Даже в классических университетских курсах анализа (не говоря о вузовских курсах высшей математики) выпуклые функции зачастую изучаются весьма скупо, традиционно завершая названный раздел. Данная

организация содержания обучения студентов математике нередко находит обоснование.

Так, авторы статьи [1] В. И. Гаврилов и А. В. Субботин во введении к ней приводят аргументы, убеждающие в том, что «такое положение вещей не есть дань традиции, а выражает суть предмета, позволяющее изложить его оптимальным способом». Они предлагают следующий порядок изложения теории выпуклых функций: выпуклые дифференцируемые на интервале функции, критерий выпуклости таких функций в терминах монотонности производной, необходимые и достаточные условия выпуклости дважды дифференцируемой в интервале функции, неравенство Йенсена и его геометрическая интерпретация, общее определение выпуклой на интервале функции. Ряд дополнительных вопросов по материалам раздела (неравенство Йенсена для произвольной выпуклой функции, эквивалентность различных определений выпуклой функции, свойства ее односторонних производных и др.) авторы выносят на самостоятельное изучение студентами. Ими констатируется: «Многолетний опыт преподавания курсов математического анализа и высшей математики в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, в Национальном Университете Черногогории и экспериментального курса математического анализа в Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана ... показывает, что прочтение всей темы укладывается в объем обычной аудиторной лекции из двух академических часов» [1, с. 27].

В данном месте отметим, что в широко используемом в университетах и педвузах России учебнике [2] понятие выпуклой вверх или вниз на интервале функции формулируется только для случая гладкости последней – в терминах касательной к ее графику. «Не ... самым простым, но которое, однако, открывает самый короткий путь для его использования» определением выпуклой дифференцируемой функции в терминах роста ее производной пользуется и О. А. Иванов в своей книге [3] для старшеклассников школ с углубленным изучением математики и их учителей, студентов математических факультетов университетов и их преподавателей. Он также пишет: «Вполне достаточно ограничиться введением понятия выпуклости для дифференцируемых функций (поскольку с точки зрения приложений функции бывают или дифференцируемые, или кусочно-линейные – а в последнем случае работает другое – геометрическое – определение выпуклости)» [4, с. 40]. Только гладкие выпуклые функции студенты изучают и по другим книгам (например, по учебнику [5]).

Подходы цитируемых авторов к введению понятия выпуклой функции исходят из непосредственного решения задачи интенсификации образовательного процесса (большой объем учебного материала – за меньшее время). Они продиктованы, в основном, существующими ограничениями аудиторной нагрузки студентов и зачастую

неизбежны. Однако их формальное и всеобщее использование для обучающихся различных уровней подготовки обедняет осмысление студентами тематики выпуклых функций, поскольку не только ограничивает диапазон таких функций, но и сужает их свойства, методы исследования, также сферу приложений. При воспитании высокопрофессиональных специалистов с таким положением дел вряд ли можно соглашаться. В частности, обозначенные выше подходы к изучению выпуклых функций, на наш взгляд, неприемлемы для направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, профиль Математика (уровень магистратуры).

Таким образом, видится целесообразность в расширении объема материала по тематике выпуклых функций, входящего в состав профессиональной подготовки будущих учителей математики. При этом его содержание должно претерпеть качественные изменения по сравнению с тем, что традиционно включается в раздел «Выпуклые функции» курса математического анализа для бакалавриата. Следует обеспечить не только соблюдение необходимой общности в определении понятия выпуклой функции, но и строгое обоснование свойств выпуклых и вогнутых функций, освоение соответствующего инструментария для решения задач (в том числе научно-исследовательских), обсуждение исторической ретроспективы введения понятия и его современного состояния, актуализировать направления научного поиска в данной области. Перечисленные условия послужат платформой для получения студентом-магистрантом глубоких предметных знаний и сделают возможной продуктивную деятельность выпускника, например, в рамках подготовки тематического элективного курса для учащихся общеобразовательных школ, организации внеклассной работы по предмету или проведения собственных фундаментальных исследований по тематике, связанной с выпуклыми функциями. Представленные аргументы обуславливают актуальность настоящего исследования, целью которого является обоснование необходимости углубленного изучения выпуклых функций и их приложений в условиях профессионально-педагогической подготовки учителя математики, а также выявление его метапредметных характеристик.

Обзор литературы

Следует констатировать, что в текущем столетии тематика выпуклых функций продолжает активно развиваться. Об этом свидетельствуют, например, монографии [6], [7]. Кроме того, систематически выходят научные статьи, посвященные описанию различных классов выпуклых функций и их применениям. Укажем на некоторые из них.

Так, статьи [8]–[10] связаны с рассмотрением свойств и применений логарифмически выпуклых

функций, определяемых через обычную выпуклость их натурального логарифма. С использованием данных функций в вопросах доказательства неравенств и решения уравнений читатель может предметно познакомиться по учебному пособию [11]. На характеристику геометрически выпуклых функций нацелены работы [12]–[14] (впервые понятие геометрически выпуклой функции было введено Р. Montel в [15]). В статьях [16], [17] авторы изучают так называемые GA-выпуклые функции, при этом геометрическая выпуклость функции полностью может определяться GA-выпуклостью ее натурального логарифма.

В работах [18]–[21] осмысливаются различные свойства гармонически выпуклых и гармонически логарифмически выпуклых функций. Понятие выпуклой функции в классическом смысле и выше приведенные понятия различных видов выпуклости функций обобщаются в [22]. В контексте предложенного авторами определения обычная выпуклость есть (1,1)-выпуклость, логарифмическая – (1,0)-выпуклость, геометрическая – (0,0)-выпуклость; GA-выпуклые функции – это (0,1)-выпуклые, гармонически выпуклые функции – (–1,1)-выпуклые и, наконец, гармонически логарифмически выпуклые функции являются (–1,0)-выпуклыми. Некоторые свойства (0,0)-выпуклых функций, то есть геометрически выпуклых функций, рассмотрены в работе [23]. Интересен также класс g -выпуклых функций, который подвергнут осмыслению в статье [24].

Можно охарактеризовать и другие виды выпуклости функций, но ограничение объема статьи не позволяет это сделать. Упомянем лишь о некоторых из них, отсылая читателя к соответствующим литературным источникам. Так, в статьях [25]–[28] изучаются s -выпуклые функции, в [29] – s -геометрически выпуклые, в [30] – p -выпуклые, в [31] – (p,h) -выпуклые, а в [32] – HG -выпуклые. Наконец, в [33] рассматривается обобщенное понятие выпуклой функции, вбирающее в себя и понятие обычной выпуклости функции, и все перечисленные выше – от логарифмической выпуклости до (p,h) -выпуклости.

В данном месте подчеркнем следующее. Несмотря на то, что в тематике выпуклых функций изучается множество различных классов выпуклых функций, в учебной литературе должным образом представлены лишь классические выпуклые функции. В значительном количестве статей, учебных пособий для школьников, студентов и их преподавателей приводятся сведения и методические материалы о том, как обычные выпуклые функции эффективно применяются при исследовании функций, доказательстве неравенств, решении уравнений, рассмотрении оптимизационных задач. Подобных сведений о других классах выпуклых функций (за исключением, разве что лишь, логарифмически выпуклых, см. [11]) читатель в литературе не обнаружит.

Материалы и методы

Представленное исследование исходит из принципов непрерывности, преемственности и системности современного образования. Его методологическую основу составляют концепции гуманизации и гуманитаризации педагогического образования (Т. А. Иванова, А. Х. Назиев, Н. Х. Розов, Г. И. Саранцев, и др.); тенденция фундаментализации математического образования (И. В. Егорченко, С. И. Калинин, Н. В. Садовников, В. А. Садовничий, В. А. Тестов и др.), основные положения компетентностного и метапредметного подходов в обучении (Ю. В. Громыко, В. И. Загвязинский, И. А. Зимняя, О. Е. Лебедев, А. В. Хуторской, М. А. Чошанов и др.); теория деятельностного подхода в образовании (А. Н. Леонтьев, А. М. Пышало, Н. Ф. Талызина и др.); теоретико-методологические основы профессиональной подготовки будущих учителей математики (О. А. Иванов, Г. Л. Луканкин, А. Г. Мордкович, Е. И. Смирнов, А. В. Ястребов и др.).

Составной частью предпринятого исследования явилось изучение фундаментальных трудов по теории выпуклых функций и неравенств, критичное осмысление современных журнальных публикаций по данной тематике. Кроме того, его обязательным элементом стала проработка нормативной и программной документации, определяющей подготовку педагогов-математиков (ФГОС ВО, Концепция развития математического образования, Профессиональный стандарт педагога и др.), доступных методических ресурсов (учебников, учебных пособий, методических рекомендаций, сборников задач). Анализ последних показал недостаточность глубины изучения выпуклых функций в рамках предметной подготовки будущих учителей математики. Следует констатировать также исключительно слабую демонстрацию гуманитарного и методического потенциала затрагиваемой содержательной области.

Помимо теоретического анализа и сопоставления подходов к изложению вопросов выпуклости функций в вузовских учебниках и учебных пособиях по математическому анализу методами исследования стали:

- изучение содержательных и организационных особенностей процесса профессионально-педагогической подготовки учителей математики;
- осуществление педагогических измерений (анкетирование, опрос, анализ продуктов учебной и научно-исследовательской деятельности студентов);
- теоретическое моделирование эффективного процесса изучения выпуклых функций и неравенств будущими учителями математики, экспериментальная проверка выстроенной модели.

Отметим, опытно-поисковая работа авторами осуществлялась в Вятском государственном

университете (ВятГУ) при обучении магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Кроме того, материалы экспериментального обучения свою апробацию проходили в рамках регулярного студенческого научно-исследовательского семинара, функционирующего на факультете компьютерных и физико-математических наук ВятГУ. Теоретическая база исследования представлена научно-исследовательской деятельностью авторов, отраженной в материалах их выступлений на научно-методических семинарах и научно-практических конференциях различного уровня (см., напр., [18], [22], [34], [35]).

По замыслу исследования алгоритм поисковой работы предполагает построение открытой модели изучения неравенств и выпуклых функций будущими педагогами. Известно, что открытые дидактические модели используют ценностную систему мотивации студентов, ориентированы на применение компетентностного подхода, создание модульных курсов и дисциплин, реализующих возможность изменения их содержания в зависимости от потребностей участников образовательного процесса, применение в обучении средств ИКТ, а также приобщение студентов к регулярной научно-исследовательской деятельности. Внедрение разработанной модели в процесс обучения магистрантов стало необходимым условием проверки ее работоспособности и эффективности. В этой связи систематически осуществлялся мониторинг соответствия теоретической модели ее практической реализации. Использование эмпирических и праксиметрических методов исследования позволило не только многоаспектно оценивать образовательные результаты эксперимента и проводить своевременную коррекцию построенной модели, но и определять, насколько она «самообучаема», т.е. способна к трансформации в зависимости от реальных условий функционирования.

Результаты исследования

На этапе проектирования системы изучения магистрантами неравенств и выпуклых функций первоначально были выделены ее основные дидактические компоненты. Исходя из цели формирования квалифицированного и конкурентоспособного специалиста в области современного образования, мы сформулировали задачи обучения, сопряженные с развитием личностных качеств студентов и становлением их общекультурных, профессиональных и исследовательских компетенций, продумали механизмы положительной мотивации обучающихся, модульную структуру будущей дисциплины и варианты ее содержательного наполнения. Формы организации работы основывались на использовании методов проблемного обучения, эвристических приемов, предполагали большую долю

самостоятельной работы студентов и их приобщение к регулярной научно-исследовательской деятельности. Обозначенные компоненты проектируемой дидактической модели отвечают принципам современного образования, а модульное построение изучаемого материала наряду с использованием личностно ориентированных образовательных технологий «дает возможность выстраивания индивидуальных траекторий обучения и вариативного освоения программы математического курса» [36, с. 194].

На следующем этапе исследования произведена компоновка модулей дисциплины «Неравенства и выпуклые функции» и разработана ее программа. В Таблице 1 представлен один из вариантов тематического планирования, используемый в обучении магистрантов в 2015–2016 и 2016–2017 уч. гг. Распределение часов учитывает заложенную в учебном плане самостоятельную работу студентов, в том числе их подготовку к промежуточной аттестации.

Таблица 1

Тематическое планирование дисциплины

Тема	Количество часов
Модуль 1. Выпуклые функции и их применение	
Тема 1.1. Классическое определение выпуклой (вогнутой) функции. Геометрическая характеристика выпуклости функции	6
Тема 1.2. Необходимые и достаточные условия выпуклости непрерывной на промежутке функции в различных терминах (монотонности первой производной, знака второй производной внутри промежутка)	6
Тема 1.3. Свойства выпуклых функций	6
Тема 1.4. Неравенство Иенсена и его аналог	7
Тема 1.5. Неравенство Эрмита–Адамара и его приложения	7
Тема 1.6. Образовательно-историческое значение неравенства Эрмита–Адамара	6
Тема 1.7. Выпуклые функции как метод решения задач	6
Модуль 2. Альтернативные определения понятия выпуклой функции	
Тема 2.1. Логарифмически выпуклые функции и их свойства	6
Тема 2.2. Аналоги неравенств для выпуклых функций в кластере логарифмической выпуклости	7
Тема 2.3. Логарифмически выпуклые функции в задачах математики и прикладных областей	8
Тема 2.4. GA-выпуклые функции	5
Тема 2.5. Геометрически выпуклые функции	5
Тема 2.6. Гармонически выпуклые функции	5
Модуль 3. Классические неравенства и их модификации	
Тема 3.1. Неравенство Бернулли	10
Тема 3.2. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, его обобщения и уточнения	12
Тема 3.3. Неравенство Ки Фана и его уточнения	10
Тема 3.4. Неравенство Коши–Буняковского и его обобщения	10
Тема 3.5. Простое и обобщенное неравенства Гюйгенса	6
Тема 3.6. Применения неравенств к решению задач	16
Итого	144

В данном варианте изложения выделены три взаимосвязанных модуля дисциплины. На практике реализация каждого модуля начиналась с определения его ключевых понятий, обсуждения их свойств и способов применения для решения типичных, базовых упражнений. Далее акцент переносился на индивидуальную самостоятельную работу студентов по решению различных задач, связанных с тематикой модуля.

Очередность предложенного расположения модулей обоснована следующими соображениями.

1. В рамках математической подготовки будущих учителей математики выпуклые функции рассматриваются в качестве фундаментального образовательного объекта. Данный тезис определяет выбор тематики первого модуля в роли базового звена дисциплины.

2. Правильному формированию представлений студентов о развитии понятия выпуклой функции должно способствовать непременно изучение неравенства Эрмита–Адамара (см., напр., [6]) и анализ его образовательно-исторического значения. Соответствующая тема не случайно включена в состав первого модуля курса. Во-первых, реконструкция истории появления неравенства Эрмита–Адамара (см. [6], [7]) заставляет задуматься о приоритете Иенсена в определении понятия выпуклой функции. Во-вторых, восприятие данного неравенства как учебно-исследовательской задачи нацеливает на глубокую систематизацию важнейших свойств выпуклой функции: обоснование ее непрерывности и односторонней дифференцируемости внутри рассматриваемого промежутка, интегрируемости по Риману на замкнутом отрезке, конструирование разрывных выпуклых или вогнутых функций и др. Следует заметить, далеко не во всех курсах математического анализа авторами осмысляются упоминаемые свойства. В-третьих, обсуждаемое неравенство позволяет наиболее естественным образом выстраивать другие модули дисципли-

ны, обозначая многочисленные направления развития изучаемого материала и способствуя реализации индивидуализации обучения студентов. Кроме того, это неравенство может представлять «отправную точку» для получения множества потенциальных результатов, связанных с современными научными исследованиями в тематике выпуклых функций (см., напр, [37] – [40]). Таким образом, неравенство Эрмита–Адамара плотно «увязывает» содержание дисциплины, позволяя рассматривать тематику выпуклых функций в качестве необходимой метапредметной составляющей обучения магистрантов.

3. Второй модуль посвящен изучению различных классов выпуклых функций, отличных от классических. В данном месте перед слушателями курса раскрываются некоторые направления современных исследований по затрагиваемой тематике, очерчиваются перспективы ведения самостоятельного научного поиска. Результатом исследовательской деятельности в рамках настоящей тематики стали работы с участием студентов (см., напр., последние [41], [42]).

4. Модуль «Классические неравенства и их модификации» закономерно завершает анонсируемый курс, поскольку рассматриваемые неравенства естественным образом получают-ся как следствия ранее изученных свойств выпуклых функций различного вида (соответствующие примеры мы приведем ниже). Отметим, что последняя тема модуля раскрывает широкие возможности для применений классических неравенств в вопросе решения задач школьной математики. Это позволяет продемонстрировать студентам образовательный потенциал тематики неравенств, а также дополнить диапазон методических приемов работы со школьниками при обучении их математике. Данная тема непосредственно ориентирует магистрантов на их будущую профессионально-педагогическую деятельность.

Рис. 1 Варианты построения индивидуальных образовательных траекторий при изучении курса «Неравенства и выпуклые функции»

Ключевым понятием дисциплины является понятие выпуклой функции. В работе [43] описаны содержательно-деятельностные фрагменты методики работы с его определением, позволяющие не только сформулировать оригинальный критерий выпуклости (вогнутости) функции на промежутке, но и получить уточнения определяющего выпуклость неравенства Иенсена. В дальнейшем, предполагая подробное освоение студентами выпуклых функций, осмыслены индивидуальные образовательные траектории обучающихся. Ниже (см. рис. 1) представлено возможное содержательное наполнение некоторых из них, основанное на опыте преподавания.

Одно из направлений затрагивает исторический контекст возникновения понятия выпуклой функции. Важным моментом здесь, как уже отмечалось выше, является изучение неравенства Эрмита–Адамара. В данной связи в число вопросов для самостоятельного исследования магистрантами естественно включить следующие: можно ли положить неравенство Эрмита–Адамара в основу определения понятия выпуклой функции? Если да, то какие изменения претерпит стандартное изложение теории выпуклых функций? Известны ли Вам математические результаты, сходные с неравенством Эрмита–Адамара, но предшествующие ему? Согласны ли вы с тем, что упоминаемое неравенство связано с именами двух ученых? Почему неравенство Иенсена, будучи, по сути, следствием неравенства Эрмита–Адамара и открытое позднее, получило большее распространение в математике?

Поиск ответов на данные вопросы потребует изучения научной и научно-методической литературы (в том числе и на иностранных языках), архивных изысканий, сопоставления мнений различных ученых. Подобная деятельность сопряжена с развитием у студентов критичности мышления, его гибкости и творческих характеристик, что непосредственно связано с формированием метазнаний и метаумений будущих педагогов. Глубокие исследования в рамках обозначенной проблематики могут стать основой научных статей или магистерских диссертаций обучающихся.

Варьирование вопросов, восходящих к истории выпуклых функций и классических неравенств, влечет обширную работу по изучению их свойств, что обозначает еще одно направление индивидуальной работы с обучающимися. Деятельность в его рамках обогащает арсенал средств, используемых студентами при решении математических задач, позволяет получать обобщения и аналоги последних, формулировать собственные упражнения, ставить открытые вопросы. Рассмотрим пример одной такой задачи.

Доказать неравенства [44, с. 96]

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1)$$

Авторы задачи в демонстрации ее решения находят наименьшее и наибольшее значения функции $g(x)=1/(x+1)(2-x)$ на отрезке $[0; 1]$. В силу строгого неравенства

$$\frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}e^x \quad x \neq 0, x \neq 1/2, x \neq 1,$$

почленным интегрированием получается требуемый результат.

Предложим несколько направлений развития данной задачи.

Первое направление. Найдите другие способы получения оценок снизу и сверху для данного в задаче интеграла. Сравните степень точности оценок, доставляемых различными способами, а также сложность их получения.

Для решения поставленной задачи обратимся к неравенству Фейера (см. [45]). Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{e}}{3} \ln 2 &= \sqrt{e} \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(2-x)} < \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \\ < \frac{1+e}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(2-x)} = \frac{1+e}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

Далее следует сравнить полученные оценки с представленными выше.

Второе направление. Измените подынтегральную функцию в исходной задаче таким образом, чтобы предложенный авторами метод решения был бы неприменим, однако оценка интеграла оставалась бы возможной посредством использования свойств выпуклых функций.

Опишем лишь один вариант решения поставленной задачи. Числитель данной подынтегральной функции изменим на $e^{x^2} - 2x$. Поскольку ее первообразная не выражается через элементарные функции, а нахождение наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[0; 1]$ невозможно без применения приближенных вычислений, демонстрируемый авторами подход к решению задачи неприменим. Однако неравенство Фейера позволяет получить оценки

$$\frac{2(\sqrt[4]{e}-1)\ln 2}{3} < \int_0^1 \frac{e^{x^2} - 2x}{(x+1)(2-x)} dx < \frac{(e-1)\ln 2}{3}$$

Третье направление. Предложите свою задачу, связанную с получением оценок для определенного интеграла некоторой функции. Проанализируйте возможные способы ее решения. Заметим, что для ответа на поставленный вопрос требуется умение конструировать функции, обладающие определенными свойствами. Первоначальная задача при этом трансформируется в зависимости от предполагаемого метода ее решения (традиционные способы оценки интеграла, применение неравенства Эрмита–Адамара или неравенства Фейера, обращение к неравенству Коши–Буняковского для оценки подынтегральной функции и пр.).

Умение строить функции с желаемыми свойствами оказывается полезным при обосновании неравенств, в том числе классических. В научно-методической литературе описано немало способов получения известных неравенств (Коши, Коши–Буняковского, Коши–Гельдера, Минковского и др.) как следствий неравенства Иенсена, характеризующего выпуклые функции.

Не менее эффективно при обосновании неравенств можно использовать и свойства логарифмически выпуклых функций. Конструирование подходящих логарифмически выпуклых (вогнутых) функций и последующее применение к ним аналога неравенства Иенсена позволяет обосновать многие классические неравенства. Указанным способом, к примеру, доказано неравенство Ки Фана, весовое неравенство Гюйгенса, а также его обобщение (см. [11]). Анализ доказательств такого рода представляет еще одно направление работы студентов в рамках курса «Неравенства и выпуклые функции».

Различным аспектам методики формирования исследовательских умений студентов средствами математических неравенств посвящены отдельные разделы диссертации [46]. В цитируемой работе систематизирован актуальный задачный материал, который может быть использован при изучении неравенств и их приложений как школьниками, так и студентами математических направлений подготовки.

Таким образом, содержание дисциплины «Неравенства и выпуклые функции» может быть выстроено весьма вариативно, с опорой на индивидуальные образовательные интересы обучающихся. При таком подходе студенты приобретают ценный образовательный опыт по избранному направлению подготовки, испытывая качественную личностную трансформацию. Сеем утверждать, что в условиях формирования метапредметных компетенций магистрантов данный процесс является следствием глубокого изучения темы «Выпуклые функции» как фундаментального образовательного объекта.

Поскольку осмысление выпуклых функций в обозначенном контексте представляет собой определенную новизну, необходимо сопоставить ряд дидактических параметров обсуждаемой содержательной области с соответствующими характеристиками фундаментальных образовательных объектов.

✓ Целью изучения выпуклых функций магистрантами педагогического образования является формирование полного и связного представления об одном из классических понятий анализа, что наряду с учетом индивидуальных интересов студентов обеспечивает для них «сквозной», системный образовательный результат и решает «проблему сопряжения индивидуальности учащихся и объективной познаваемой действительности» [47].

✓ Содержание дисциплины «Неравенства и выпуклые функции», а также применяемые при ее освоении формы взаимодействия участников образовательного процесса характеризуются разнообразием способов деятельности, среди которых методы проблемного и исследовательского обучения, эвристические приемы, самостоятельное изучение научной литературы, использование учебной и коллегиальной коммуникации обучающихся, их кооперации и сотрудничества. Таким образом, рассматривая тематику выпуклых функций как инвариант математического образования, мы формируем у магистрантов специфические формы мышления и универсальные способы действий (метапредметные компетенции) для будущей профессии.

✓ Как известно, период освоения фундаментальных образовательных объектов не определяется возрастом учащегося. В данной связи заметим, что знакомство с понятиями выпуклости и выпуклой функции начинается в рамках общего образования, а их систематическое изучение продолжается в университетских курсах высшей математики (углубленно – в разделах математического анализа). Профессионально исследованиями в обозначенной области науки можно заниматься и далее.

Выделенные параметры (целеполагание, содержательная и организационно-деятельностная основы, сроки освоения), считающиеся одними из ключевых при анализе любой дидактической конструкции, действительно позволяют воспринимать выпуклые функции в качестве фундаментального образовательного объекта. Занимая свою «образовательную нишу», связанное с выпуклыми функциями содержание обучения обеспечивает развитие теоретического мышления студентов, их уверенную ориентацию в различных предметных областях, что помогает преодолеть разобщенность фундаментальных знаний, обуславливая целостное восприятие науки и мира и, следовательно, способствуя реализации принципа метапредметности образования.

Заключение

В современном образовании процессы интенсификации должны согласовываться с концепциями его фундаментализации и гуманитаризации, с принципами научности и системности обучения, идеями деятельностного и задачного подходов. Нередко, однако, проявляется обратное. В математическом образовании это чаще всего выражается в том, что содержание некоторых тем и разделов дисциплины упрощается, обедняется, нередко выносятся на формальное самостоятельное освоение обучающимися («оптимизируется») или вообще исключается из их рассмотрения. В отношении неравенств и выпуклых функций допускать подобное никак нельзя.

Подчеркнем, изучение выпуклых функций предусмотрено учебными планами лишь общеобразовательных школ и классов, углубленно изучающих математику или имеющих физико-математический (естественнонаучный) профиль. Вследствие этого тематика выпуклых функций не задействована составителями ЕГЭ, весьма редко она встречается и в олимпиадных задачах по математике. И тут встает вопрос: почему же ведущие отечественные издания («Математика в школе», «Квант», «Математическое образование» и др.), пользующиеся высоким авторитетом в вопросах обучения математике, с таким пиететом относятся к публикациям в данной области? Наш ответ такой: глубокое освоение понятия выпуклости (выпуклой функции) закладывает краеугольный камень математического образования. Признанным ученым-математикам, методистам и даже популяризаторам науки это ясно. Понятно и то, что эффект от фундаментального изучения выпуклых функций не может быть скорым, однако он непременно положительно скажется как на развитии мышления обучающихся, так и на их учебной мотивации и качестве знаний по математике.

Соответствующие образовательные задачи авторами настоящей статьи решались при разработке дисциплины «Неравенства и выпуклые функции» для будущих учителей математики. О достижении поставленных целей можно судить по результатам анкетирования, проведенного с магистрантами, освоившими названный курс. Студенты отметили свои успехи в различных направлениях, в числе которых существенное расширение научного кругозора, повышение математической грамотности (к тексту учебников, пособий, статей обучающиеся стали относиться более серьезно, критично оценивая используемую авторами терминологию, аналитические выкладки, сравнивая классические и инновационные подходы к изложению материала), развитие исследовательских компетенций (что осо-

бенно сказалось при написании магистерских диссертаций).

Как оказалось, можно говорить и о «продолженном» действии опытного преподавания. Опрос среди бывших слушателей дисциплины «Неравенства и выпуклые функции», а ныне учителей математики и вузовских преподавателей г. Кирова показал востребованность тематики курса в их профессиональной деятельности. Многие педагоги отметили, что они расширили знакомство школьников с классическими неравенствами, подчеркнув положительный мотивационный эффект данного шага. Некоторые рассказали о вынашиваемых перспективах разработки элективного курса для старшеклассников по данной тематике и организации школьниками научных исследований.

Анализ полученных данных свидетельствует о дидактическом и когнитивном потенциале рассматриваемой предметной области. Здесь будет уместным вспомнить слова И. Иенсена из [48, с. 191], высказанные им более века назад, в 1906 году. В переводе они звучат так: «Я полагаю, что понятие выпуклой функции приблизительно так же фундаментально, как положительная функция, возрастающая функция. Если я не ошибаюсь, понятие займет достойное место в теории вещественных функций».

Можно говорить об эффективности сконструированной модели преподавания дисциплины «Неравенства и выпуклые функции». Поскольку модель открытая, эксперимент по ее совершенствованию будет продолжаться. В рамках дальнейшей работы предстоит, в частности, осмыслить вопросы, касающиеся обращения к информационным технологиям в процессе преподавания.

Авторы предполагают, что материалы данной статьи окажутся полезными для преподавателей вузов, осуществляющих подготовку и учителей математики, и математиков-исследователей, и математиков-прикладников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов В. И., Субботин А. В. Изложение темы «Выпуклые функции» в университетском курсе математического анализа // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 21–28.
2. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: Учебник для ун-тов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего. М.: Высш. шк., 1999. 695 с.
3. Иванов О. А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009. 384 с.
4. Иванов О. А. Математическое образование студентов экономических специальностей вузов: цели, проблемы, перспективы // Российское экономическое образование глазами преподавателя. СПб: Русский остров, 2011. С.36–44.
5. Уваренков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа. Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Т. I. М.: Просвещение, 1966. 640 с.
6. Dragomir S. S., Pearce C. E. M. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA Monographs, Victoria University, 2000, 361 p.
7. Niculescu C. P., Persson L.-E. Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 2005.
8. Аносов Д. В. О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. 2001. Сер. 3. Вып. 5. С. 158–163.
9. Калинин С. И. Аналогии неравенства Иенсена для выпуклых и логарифмически выпуклых функций, их некоторые применения // Advanced Science. 2017. № 4. С. 12.

10. Калинин С. И. Логарифмически выпуклые функции, их свойства и некоторые применения // Математика в школе. 2007. № 7. С. 41–50, 76.
11. Калинин С. И. Метод неравенств решения уравнений. Учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. М.: Изд-во «Московский Лицей», 2013. 112 с.
12. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Geometrically Relative Convex Functions, Appl. Math. Inf. Sci. 8, no. 2, pp. 607–616 (2014).
13. Zhang X., Zheng N. Geometrically convex functions and estimation of remainder terms for Taylor expansion of some functions, J. of Math. Inequal, Vol. 4, No.1 (2010), pp.15–25.
14. Zhang X.-M., Xu T.-Q., Situ L.-B. Geometric convexity of a function involving gamma function and applications to inequality theory, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 8(1) (2007), Art. 17, p. 9.
15. Montel P. Sur les fonctions convexes et les fonctions sous harmoniques, Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), pp. 29-60.
16. Kaizhong G. GA-convexity and its applications. Anal. Math. 2013. 39, № 3, pp. 189–208.
17. Zhang X.-M., Chu Y.-M., Zhang X.-H. The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application. J. of Inequal. and Appl., Vol. 2010, Article ID 507560, p.11.
18. Калинин С. И. Геометрическая характеристика гармонически выпуклых функций // Актуальные проблемы физико-математического образования. М-лы II Междунар. науч.-практ. конф. Наб. Челны: НГПУ, 2017. С. 24–27.
19. Калинин С. И. О достаточных условиях гармонической выпуклости функции // Advanced Science. 2018. № 1. С. 9-12.
20. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some characterizations of harmonically log-convex functions, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 17 (2014), № 1. pp. 51–61.
21. İşcan İ., Wu S. Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 238 (2014). pp. 237–244.
22. Калинин С.И. (α, β) -выпуклые функции, их свойства и некоторые применения. Уфимская международная математическая конференция. Сборник тезисов / отв. ред. Р. Н. Гарифуллин. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 75–76.
23. Калинин С. И. $(0,0)$ -Выпуклые функции и их свойства // Комплексный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 142, ВИНТИ РАН, М., 2017, 81–87.
24. Zhao Y. X., Wang S. Y., Uria L. Coladas. Characterizations of r-Convex Functions. J. Optim. Theory Appl. (2010) 145: 186–195.
25. Hudzik H., Maligranda L. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math. 48 (1994), no. 1, 100–111.
26. Hussain S., Bhatti M. I., Iqbal M. Hadamard-type inequalities for s-convex functions, I, Punjab Univ. J. Math. (Lahore) 41 (2009), 51–60.
27. Kirmaci U. S., Klaričić Bakula M., Özdemir M. E. Pečarić J. Hadamard-type inequalities for s-convex functions, Appl. Math. Comput. 193 (2007), No. 1, 26–35.
28. Hua J., Xi B.-Y., Qi F. Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions, Afrika Matematika 26 (2015), No. 5–6, 741–752.
29. Zhang T.-Y., Tunç M., Ji A.-P., Qi F. On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-geometrically convex functions, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2014, Article ID 294739.
30. Zhang K.S., Wan J.P. p-convex functions and their properties. Pure Appl. Math., 2007, 23(1), 130–133.
31. Fang Z. B., Shi R. On the (p, h) -convex function and some integral inequalities. Journal of Inequalities and Applications 2014, 2014:45.
32. Dragomir S. S. Inequalities of Hermite-Hadamard type for HG-convex functions. Probl. Anal. Issues Anal.. Vol. 6 (24), No. 2, 2017, pp. 25–41.
33. Niculescu C. P. Convexity according to means. Math. Inequal. Appl., Volume 6, Number 4, 2003, 571–579.
34. Калинин С. И. Образовательный потенциал неравенств и выпуклых функций в подготовке будущих учителей математики // Всеросс. науч.-метод. конф. «Преподавание физико-математических и естественных наук в школе. Традиции и инновации». Тезисы конф. 29–30 марта 2017 г. Н. Новгород, 2017. С. 19–20.
35. Калинин С.И., Панкратова Л.В. Уточнение весового неравенства Коши методом несобственного интеграла // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования. М-лы Междунар. науч.-практ. конф., 26-28 апреля 2016 г./под общ. ред. Е. Ю. Лискиной; Ряз. гос. ун-т им. С. А. Есенина. Рязань, 2016. С. 43–46.
36. Попов Н. И., Никифорова Е. Н. Методические подходы при экспериментальном обучении математике студентов вуза // Интеграция образования. 2018. Т. 22, № 1. С. 193–206.
37. Абрамович С., Перссон Л. Е. Неравенства типа Фейера и Эрмита–Адамара для N-квазивыпуклых функций // Математические заметки. 2017. Т. 102. № 5. С. 644–656.
38. Berikhanova G. E., Zholymbaev O. M., Mussatayeva I. S. On some integral inequalities for convex functions // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Т. 101. № 12. С. 2645-2651.
39. Delavar M. R., Dragomir S. S., De La Sen M. Estimation type results related to Fejér inequality with applications // Journal of Inequalities and Applications. Published on: 13 April 2018.
40. Xi B. Y., Qi F. Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for $((\alpha; M); \log)$ -convex functions on coordinates // Probl. Anal. Issues Anal.. Vol. 4 (22). No. 2, 2015. pp. 73–92.
41. Анфертеева Е. А., Калинин С. И. Некоторые свойства гармонически выпуклых и гармонически логарифмически выпуклых функций // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Выпуск 19. Киров: Науч. изд-во ВятГУ, 2017. С. 28–35.
42. Калинин С. И., Леонтьева Н. В. $(1/2, 1)$ -выпуклые функции. Ч. I // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 97–104.

43. Калинин С.И. Фрагмент работы с определением понятия «выпуклая функция» // Вестник ВятГГУ. Науч. журнал. 2014. № 3 . С. 119–124.
44. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 504 с.
45. Féjer L. Über die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss Anz. Ungar. Akad. Wiss, Hungarian, Vol. 24, 1906, pp. 369–390.
46. Панкратова Л. В. Формирование исследовательских умений в обучении математике учащихся общеобразовательных школ средствами неравенств: дис.....канд. пед. наук. Киров, 2014. 219 с.
47. Хуторской А. В. Фундаментальный образовательный объект [Электронный ресурс] // URL: http://khutorskoy.ru/science/concepts/terms/fundamental_educational_object.htm (дата обращения 25.06.2018).
48. Jensen J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta. Math., 30 (1906), 175–193.

REFERENCES

1. Gavrilov V.I., Subbotin A.V. Presentation of the topic “Convex Functions” in the university course of mathematical analysis. *Mathematics in higher education*. 2003. no. 1. pp. 21–28. (in Russian)
2. Arkhipov G.I., Sadovnichy V.A., Chubarikov V.N. Lectures on Mathematical Analysis: A Textbook for Universities and Ped. Universities / ed. V. A. Sadovnichiy. Moscow, Higher school Publ., 1999. 695 p. (in Russian)
3. Ivanov O. A. Elementary mathematics for schoolchildren, students and teachers. Moscow, MTSNMO Publ., 2009. 384 p. (in Russian)
4. Ivanov O. A. Mathematical education of students of economic specialties of universities: goals, problems, prospects / Russian economic education through the eyes of a teacher. Saint-Petersburg, Russian Island Publ., 2011. pp. 36–44. (in Russian)
5. Uvarenkov I. M., Muller M.Z. Course of mathematical analysis. training manual. Vol. I. Moscow, Enlightenment Publ., 1966. 640 p. (in Russian)
6. Dragomir S. S., Pearce C. E. M. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA Monographs, Victoria University, 2000, 361 p.
7. Niculescu C. P., Persson L.-E. Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 2005.
8. Anosov D.V. On the sum of logarithmically convex functions. *Mathematical Education*. 2001. Vol. 3. Issue 5. pp. 158–163. (in Russian)
9. Kalinin S.I. Analogues of Jensen's Inequality for Convex and Logarithm Convex Functions, some of their applications. *Advanced Science*. 2017. No. 4. P. 12. (in Russian)
10. Kalinin S. I. Logarithmically convex functions, their properties and some applications. *Math at school*. 2007. no. 7. pp. 41–50, 76. (in Russian)
11. Kalinin S. I. The inequality method for solving equations. The manual on the elective course for classes of physical and mathematical profile. Moscow, Publishing House "Moscow Lyceum", 2013. 112 p. (in Russian)
12. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Geometrically Relative Convex Functions, *Appl. Math. Inf. Sci.* 8, no. 2, pp. 607–616 (2014).
13. Zhang X., Zheng N. Geometrically convex functions and estimation of remainder terms for Taylor expansion of some functions, *J. of Math. Inequal*, Vol. 4, No.1 (2010), pp.15–25.
14. Zhang X.-M., Xu T.-Q., Situ L.-B. Geometric convexity of a function involving gamma function and applications to inequality theory, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 8(1) (2007), Art. 17, p. 9.
15. Montel P. Sur les fonctions convexes et les fonctions sous harmoniques, *Journal de mathématiques pures et appliquées* 9e série, tome 7 (1928), pp. 29–60.
16. Kaizhong G. GA-convexity and its applications. *Anal. Math.* 2013. 39, № 3, pp. 189–208.
17. Zhang X.-M., Chu Y.-M., Zhang X.-H. The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application. *J. of Inequal. and Applics.*, Vol. 2010, Article ID 507560, p.11.
18. Kalinin S. I. Geometric characterization of harmonically convex functions / *Actual problems of physical and mathematical education. II Intern. scientific-practical conf.* Nab. Chelny, NGPU, 2017. pp. 24–27. (in Russian)
19. Kalinin S.I. On sufficient conditions for the harmonic convexity of a function. *Advanced Science*. 2018. no. 1. pp. 9–12. (in Russian)
20. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some characterizations of harmonically log-convex functions, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 17 (2014), no. 1. pp. 51–61.
21. İşcan İ., Wu S. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals. *Applied Mathematics and Computation*, 238 (2014). pp. 237–244.
22. Kalinin S.I. (α, β) -convex functions, their properties, and some applications. *Ufa International Mathematical Conference. Collection of Theses / Otv. ed. R.N. Garifullin*. Ufa, RIC BashGU, 2016. pp. 75–76. (in Russian)
23. Kalinin S. I. $(0,0)$ -Convex functions and their properties / *Complex analysis, Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Let's lie. mat. and its adj. theme. obz.*, 142, VINITI RAS, Moscow, 2017, pp. 81–87. (in Russian)
24. Zhao Y. X., Wang S. Y., Uria L. Coladas. Characterizations of r-Convex Functions. *J. Optim. Theory Appl.* (2010) 145: 186–195.
25. Hudzik H., Maligranda L. Some remarks on s-convex functions, *Aequationes Math.* 48 (1994), no. 1, 100–111.
26. Hussain S., Bhatti M. I., Iqbal M. Hadamard-type inequalities for s-convex functions, I, *Punjab Univ. J. Math. (Lahore)* 41 (2009), 51–60.

27. Kirmaci U. S., Klaričić Bakula M., Özdemir M. E. Pečarić J. Hadamard-type inequalities for s-convex functions, *Appl. Math. Comput.* 193 (2007), No. 1, 26–35.
28. Hua J., Xi B.-Y., Qi F. Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions, *Afrika Matematika* 26 (2015), No. 5–6, 741–752.
29. Zhang T.-Y., Tunç M., Ji A.-P., Qi F. On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-geometrically convex functions, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2014, Article ID 294739.
30. Zhang K.S., Wan J.P. p-convex functions and their properties. *Pure Appl. Math.*, 2007, 23(1), 130–133.
31. Fang Z. B., Shi R. On the (p, h)-convex function and some integral inequalities. *Journal of Inequalities and Applications* 2014, 2014:45.
32. Dragomir S. S. Inequalities of Hermite-Hadamard type for HG-convex functions. *Probl. Anal. Issues Anal.* Vol. 6 (24), No. 2, 2017, pp. 25–41.
33. Niculescu C. P. Convexity according to means. *Math. Inequal. Appl.*, Volume 6, Number 4, 2003, 571–579.
34. Kalinin S. I. Educational potential of inequalities and convex functions in the preparation of future teachers of mathematics // *Scientific method. conf. "Teaching physical, mathematical and natural sciences at school. Tradition and innovation. Abstracts Conf.* March 29–30, 2017 N. Novgorod, 2017. pp. 19–20. (in Russian)
35. Kalinin S.I., Pankratova L.V. Refinement of the Cauchy weighted inequality by the method of improper integral // *Mathematics: fundamental and applied research and education. Intern. scientific-practical conf.*, April 26–28, 2016 / under the general ed. E. Yu. Liskina; Ryazan, 2016. pp. 43–46. (in Russian)
36. Popov N. I., Nikiforova E. N. Methodical approaches in experimental teaching of mathematics to university students. *Integration of Education*, 2018. Vol. 22, no. 1. pp. 193–206. (in Russian)
37. Abramovich S., Persson L. E. Inequalities of the Fejér and Hermite – Hadamard type for N-quasiconvex functions. *Mathematical Notes*. 2017. Vol. 102. no. 5. pp. 644–656. (in Russian)
38. Berikhanova G. E., Zholymbaev O. M., Mussatayeva I. S. On some integral inequalities for convex functions. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 101. no. 12. pp. 2645–2651.
39. Delavar M. R., Dragomir S. S., De La Sen M. Estimation type results related to Fejér inequality with applications. *Journal of Inequalities and Applications*. Published on: 13 April 2018.
40. Xi B. Y., Qi F. Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for $((\alpha; M); \log)$ -convex functions on coordinates. *Probl. Anal. Issues Anal.* 2015, Vol. 4 (22). no. 2, pp. 73–92.
41. Anferteva E. A., Kalinin S. I. Some Properties of Harmonically Convex and Harmonically Log-Convex Functions / *Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Universities of the Volga-Vyatka Region: Period. Inter. sat scientific method. works*. Issue 19. Kirov: Scientific. VyatGU publishing house, 2017. pp. 28–35. (in Russian)
42. Kalinin S.I., Leontyeva N.V. $(1/2, 1)$ -convex functions. Part I. *Bulletin of the Syktyvkar University. Ser. 1: Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2018. Vol. 1 (26). pp. 97–104.
43. Kalinin S.I. Fragment of work with the definition of the concept of "convex function". *Vestnik VyatGGU*. 2014. no. 3. pp. 119–124. (in Russian)
44. Kudryavtsev L. D., Kutasov A. D., Chekhlov V. I., Shabunin M. I. A collection of problems in mathematical analysis. Volume 2. Integrals. Rows: Training. manual / Ed. L. D. Kudryavtsev. Moscow, FIZMATLIT, 2009. 504 p. (in Russian)
45. Féjer L. Über die Fourierreihen, II, *Math. Naturwiss Anz. Ungar. Akad. Wiss, Hungarian*, Vol. 24, 1906, pp. 369–390.
46. Pankratova L.V. Formation of research skills in teaching mathematics to students of secondary schools by means of inequalities: Diss. PhD Ped. Sci. Kirov, 2014. 219 p. (in Russian)
47. Khutorskoy A.V. Fundamental educational object [Electronic resource]. Available at: http://khutorskoy.ru/science/concepts/terms/fundamental_educational_object.htm (accessed 25 June 2018). (in Russian)
48. Jensen, J.L.W.V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta. Math.*, 30 (1906), 175–193.

Информация об авторах**Калинин Сергей Иванович**

(Россия, г. Киров)

Доктор педагогических наук, Профессор кафедры
фундаментальной математики
Вятский государственный университет
E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Панкратова Лариса Валерьевна

(Россия, г. Киров)

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
фундаментальной математики
Вятский государственный университет
E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Information about the authors**Sergey I. Kalinin**

(Russia, Kirov)

Doctor of Education, Professor of the Department
of Fundamental Mathematics
Vyatka State University
E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Larisa V. Pankratova

(Russia, Kirov)

PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor
of the Department of Fundamental Mathematics
Vyatka State University
E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Ссылка для цитирования^{ГОСТ}

Калинин С. И., Панкратова Л. В. Выпуклые функции как метапредметная составляющая математической подготовки магистрантов педагогического образования // *Перспективы науки и образования*. 2018. № 5 (35). С. 240–251. doi: 10.32744/pse.2018.5.27

For Reference^{APA}

Kalinin, S. I., & Pankratova, L. V. (2018). Convex functions as a metasubject component of mathematical training for undergraduates in pedagogical education. *Perspektivy nauki i obrazovaniya – Perspectives of Science and Education*, 35 (5), 240–251. doi: 10.32744/pse.2018.5.27. (In Russ., abstr. in Engl.)